Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.10. 2009

УДК 512.8

О КРУГОВОМ ЗАКОНЕ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ

А.Н. Тихомиров

В заметке дан обзор результатов по доказательству кругового закона для случайных матриц, полученных в последнее время. В том числе приведены результаты, полученные автором совместно с Ф. Гётце (F. Götze), для прореженных неэрмитовых случайных матриц большой размерности.

Пусть $X_{ij}, 1 \le i \le n, 1 \le j \le n$, совокупность независимых случайных величин, таких, что $\mathbf{E}\, X_{ij} = 0$ and $\mathbf{E}\, X_{ij}^2 = 1$. Определим матрицу

$$\mathbf{X} = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ собственные числа матрицы $\mathbf{X}$ и определим ее эмпирическую спектральную функцию распределения $F_n(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n I_{\{\mathrm{Re}\,\lambda_k \le x, \mathrm{Im}\,\lambda_k \le y\}}$, где $I_{\{B\}}$ означает индикатор события B. Будем говорить, что для матрицы $\mathbf{X}$ выполнен круговой закон, если ожидаемая спектральная функция распределения $\mathbf{E}\, F_n(x,y)$ сходится при $n \to \infty$ к функции равномерного распределения в единичном круге $F(x,y)$, то есть к функции распределения с плотностью $f(x,y) = \frac{1}{\pi} I_{\{x^2+y^2 \le 1\}}(x,y)$. Здесь мы обозначили символом $I_A(x,y)$ индикатор-функцию множества A. Впервые описанные ансамбли случайных матриц были введены в работе Жинибра (Ginibre) ([3]). Им были получены совместные распределения для собственных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ в случае

1. Частично поддержан РФФИ грант N 09-01-12180-офи-м
2.Частично поддержан РФФИ–ННИО грант 09-01-91331-ННИО-а
3.Частично поддержан грант РФ поддержки ведущих научных школ НШ-638.2008.1.

когда X_{jk} — независимые гауссовские величины. Впоследствии соответствующие матрицы получили название ансамблей Жинибра. Mehta в 1967 ([7]) году, опираясь на работу Ginibre, показал, что для матриц из ансамбля Жинибра, элементы которых комплексные гауссовские величины с независимыми вещественной и мнимой частью, выполнен круговой закон. Пастур в работе 1973 года ([8]) выдвинул гипотезу, что круговой закон должен быть выполнен для матриц, элементы которых независимы, имеют нулевые средние и конечную дисперсию. Т.е. круговой закон универсален относительно распределений элементов матрицы. Гирко в работе 1984 предложил метод исследования асимптотического поведения функции $\mathbf{E}\, F_n(x, y)$, опирающийся на методы развитые для исследования асимптотики спектра эрмитовых матриц. Им был доказан круговой закон для матриц, элементы которых имеют конечные моменты 8-го порядка и имеют ограниченную плотность распределения. Многие авторы утверждали, что доказательство Гирко некорректно (точнее, оно было неполным). В 1997 году Бай ([1]), опираясь на работу Гирко, привел полное доказательство кругового закона, но все при том же весьма ограничительном предположении существования плотности у элементов матрицы. А это значит, исключались даже такие простые матрицы, как матрицы, элементы которых принимают с равными вероятностями значения ± 1. Проблема оставалась открытой до последнего времени и получила свое решение буквально в последние два года. Суть в том, что существенную роль в доказательстве кругового закона играет поведение минимального сингулярного числа матрицы $\mathbf{X}$. Именно в этой области наметился прогресс благодаря работам Рудельсона и Вершинина ([9], [10]). Опираясь на их результаты, Ф. Гётце и А. Тихомиров в январе 2007 года ([4]) доказали круговой закон в предположении субгауссовости случайных величин, но без предположения существования плотности (в частности, это включает матрицы с ± 1). Спустя три месяца, используя результаты Гётце, Тихомирова, а также Рудельсона и Вершинина ([9], [10]), китайские математики Pan и Zhou ([6]) доказали круговой закон при наличии 4-го момента у элементов матрицы. По прошествии короткого времени Гётце и Тихомиров ([5]) доказали круговой закон в предположении, что элементы матрицы имеют моменты, лишь логарифмически превышающие второй порядок. Кроме того, в работе Гётце и Тихомирова был доказан круговой закон и для так называемых "прореженных"матриц (sparse matrices), т.е. матриц, полученных из исходной заменой элементов с вероятностью, близкой к 1, нулевыми элементами, и с вероятностью, близкой к 0, оставляемых без изменения, при условии, что среднее ненулевых элементов в строке

стремится к бесконечности не медленнее, чем квадрат логарифма размерности матрицы. В конце 2008 года Tao и Vu ([11]) поместили в arXiv препринт с доказательством кругового закона в предположении лишь второго момента у элементов матрицы. Основной результат, полученный в работе Гётце и Тихомирова, можно сформулировать следующим образом. Пусть $0 < p_n \leq 1$. Введем в рассмотрение бернуллиевские случайные величины ε_{jk}, принимающие значения 0 и 1 с вероятностью $p_n = \Pr\{\varepsilon_{jk} = 1\}$. Определим матрицу

$$\mathbf{X}^{(\varepsilon)} = \frac{1}{\sqrt{np_n}} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}X_{11} & \varepsilon_{12}X_{12} & \cdots & \varepsilon_{1n}X_{1n} \\ \varepsilon_{21}X_{21} & \varepsilon_{22}X_{22} & \cdots & \varepsilon_{2n}X_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{n1}X_{n1} & \varepsilon_{n1}X_{n2} & \cdots & \varepsilon_{nn}X_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\lambda_1^{(\varepsilon)}, \ldots, \lambda_n^{(\varepsilon)}$ собственные числа матрицы $\mathbf{X}^{(\varepsilon)}$. Пусть $F_n^{(\varepsilon)}(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n I_{\{\operatorname{Re}\lambda_j < x, \operatorname{Im}\lambda_j < y\}}$ и $\mathcal{F}_n^{(\varepsilon)}(x,y) = \mathbf{E}\, F_n^{(\varepsilon)}(x,y)$ означают соответственно выборочную и ожидаемую спектральную функцию распределения матрицы $\mathbf{X}^{(\varepsilon)}$.

Theorem 0.1. Пусть X_{jk}, $j,k = 1,\ldots n$, независимые случайные величины, такие, что $\mathbf{E}\, X_{jk} = 0$, $\mathbf{E}\,|X_{jk}|^2 = 1$, и существует неубывающая функция $\varphi(x)$, такая, что $\frac{\varphi(x)}{x}$ невозрастающая неотрицательная функция и $\varphi(x) = O(\ln^8 x)$, и $\mathbf{E}\,|X_{jk}|^2\varphi(X_{jk} \leq C < \infty$. Пусть также $\frac{1}{np_n} = O(\ln^2 n)$. Тогда

$$\mathcal{F}_n^{(\varepsilon)}(x,y) \to F(x,y) \qquad \text{при} \qquad n \to \infty. \tag{1}$$

Заметим, что при $p_n = 1$ мы получим обычный круговой закон. Наш результат показывает, что круговой закон сохраняется и для прореженных матриц с вероятностью прореживания не меньше чем $c\ln^2 n/n$. Заметим также, что если вероятность прореживания меньше чем $(1-\gamma)\ln n/n$ для любого положительного $\gamma > 0$, то матрица $\mathbf{X}^{(\varepsilon)}$ необратима с положительной вероятностью.

Литература

1. **Bai, Z. D.** Circular law// *Annals of Probab.,* **25** *(1997), 494– 529.*

2. **Girko, V. L.** Circular law// *Theory Probab. Appl.,* **29** *(1989), 694–706.*

3. **Ginibre, J.** Statistical ensembles of complex, quaterninon, and real matrices// *J. Math. Phys.,* **6** *(1965), 440–449.*

4. **Götze, F. and Tikhomirov, A. N.** On the circular law// http://arxiv.org/abs/math/0702386.

5. **Götze, F. and Tikhomirov, A. N.** The Circular Law for Random Matrices// http://arxiv.org/abs/0709.3995. Annals of Probability, 2009, to appear.

6. **G. Pan and W. Zhou,** Circular law, Extreme singular values and potential theory// http://arXiv.org/abs/math.PR/0705.3773.

7. **Mehta, M. L.** Random Matrices// *2nd ed., Academic Press, San Diego 1991.*

8. **Pastur, L.A.** Spectra of random self adjoint operators// *Russian mathematical Surveys* **28** *(1973), 1, 1–67.*

9. **Rudelson, Mark** Invertibility of random matrices: Norm of the inverse// *Ann. of Math. (2) 168 (2008), No 2, 575–600.*
http://arXiv:math/0507024 (2006).

10. **Rudelson, M. and Vershynin R.** The Littlewood–Offord Problem and Invertibility of Random Matrices// *Adv. math.218 (2008), No 2, 600–633.*
http://arXiv.org/abs/math.PR/0703307.

11. **Tao, T. and Vu, V.** *From the Littlewood-Offord problem to the Circular Law: universality of the spectral distribution of random matrices*// arXiv:0810.2994.

Summary

Tikhomirov A.N. On the circular law of random matrices

In review the new results on proving the circular law for random matrices are given. Among them are the results obtained by the author together with F.Gotze for rared non-Hermitian matrices of large dimension.

Отдел математики Коми НЦ УрО РАН;
Сыктывкарский университет

Поступила 12.11.2009