*Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.12.2010*

УДК 539.3

КОНСТРУКТИВНО-НЕЛИНЕЙНАЯ МЕХАНИКА ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК[1]

Е.И. Михайловский, В.Н. Тарасов

Излагается вторая часть статьи (первая часть опубликована в предыдущем выпуске настоящего "Вестника": 2010. – Вып. 11. – С. 5-51.), посвященная устойчивости и закритическому поведению конструкций и сооружений при односторонних ограничениях на перемещения. Статья, как было сказано в предисловии, является обзорной, однако изложенный в данной части метод движения по параметру жесткости упругой среды, публикуется впервые.

3. Устойчивость упругих систем в условиях конструктивной нелинейности

3.1. Локальный метод поиска собственных значений положительно однородного оператора

3.1.1 В монографии [49] сказано следующее: "Типичный случай длинного стержня на упругом основании представляют, например, сварные рельсы. При высоких температурах может возникнуть в таких рельсах значительное сжимающее усилие; поскольку свободному поперечному выпучиванию препятствует мостовая, рельсы могут выпучиваться по волнистой линии, если поперечное сопротивление окажется недостаточным". Закономерен вопрос: "На каком основании при математической формулировке задачи на устойчивость продольно сжимаемых рельсов жесткости при движении "в мостовую"и "из мостовой" принимаются одинаковыми? Из простых умозрительных соображений следует признать, что считать названные жесткости одинаковыми, оснований нет.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 09-01-00178-а

Иными словами, при принятии гипотезы Винклера уравнение продольного изгиба рельса следует представлять в виде

$$EIw^{IV} + c_1 w_+ + c_2 w_- = -Pw''. \qquad (3.1)$$

а не так, как его традиционно записывают (см., например, форм. (3.106) [41]):

$$EIw^{IV} + cw = -Pw''. \qquad (3.2)$$

Выше использованы обозначения: EI– жесткость стержня при изгибе; P– продольная сжимающая сила; c_1, c_2, c – жесткости винклеровых сред; $w' = dw/dx$; w_+, w_-– срезки функций прогиба:

$$w_+ = \begin{cases} w, & w > 0 \\ 0, & w \leq 0 \end{cases}, \quad w_- = \begin{cases} 0, & w \geq 0 \\ w, & w < 0 \end{cases}, \qquad (3.3)$$

Спектральные задачи на основе уранвения (3.1) можно обобщить так: найти нетривиальное решение операторного уравнения

$$\mathcal{A}(u) \triangleq Au + Bu_+ + Cu_- = \lambda Qu \qquad (3.4)$$

где A– линейный оператор, порожденный дифференциальным выражением с четными (вообще, говоря, обобщенными) производными от функции $u(M), M \in \Omega$ со старшей производной $2k$ и граничными условиями вида

$$(\Gamma_j u)(M) = 0, \quad j \in 1:k, \quad M \in \partial\Omega \qquad (3.5)$$

($\Gamma_j u$ – линейные дифференциальные выражения с порядком старшей производной не достигающим $2k$); Q– линейный оператор, порожденный дифференциальным выражением со старшей производной порядка $2(k-i), i \geq 1$ и граничными условиями (3.5); B, C– операторы умножения на неотрицательную функцию.

Таким образом, ставится задача: найти нетривиальное решение уравнения (3.4) на множестве функций

$$D_A = \left\{ u \in C^{(2k)}(\bar{\Omega}) : (\Gamma_j u)(M) = 0, \quad j \in 1:k, \quad M \in \partial\Omega \right\}. \qquad (3.6)$$

Обозначим множество функций, суммируемых с квадратом вплоть до k-ой обобщенной производной и удовлетворяющих граничным условиям (3.5), через $\mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)$ Известно [50, 43], что $\mathring{W}_2^{(k)}$– полное гильбертово пространство в котором D_A является плотным множеством. Учитывая, что $\mathcal{A}(\alpha u) = \alpha\mathcal{A}(u)$ при $\alpha > 0$, сформулированную задачу можно отнести *к проблеме собственных значений положительно однородных операторов.*

Норму и скалярное произведение в пространствах $\mathring{W}_2^{(k)} \triangleq H$ и $L_2(\Omega)$ будем обозначать так:

$$||u||_H, (u,v)_H; \; ||u||, (u,v). \tag{3.7}$$

Имеют место соотношения

$$H \subset L_2(\Omega), \quad ||u||_H \geq c_\circ ||u||, \quad c_\circ > 0, \tag{3.8}$$

т.е. пространство H ограничено вкладывается в пространство $L_2(\Omega)$ [50,43].

Проблеме собственных значений положительно однородного оператора можно дать вариационную формулировку: найти $u(M)$, такие, что

$$f(u) \longrightarrow \min_{u\in\mathfrak{M}}, \quad \mathfrak{M} = \{u \in H : g(u) = 1\}, \tag{3.9}$$

где введены обозначения

$$f(u) = \tfrac{1}{2}(f'u, u), \; f'u = \mathcal{A}(u); \; g(u) = \tfrac{1}{2}(Qu, u). \tag{3.9$'$}$$

Ниже предполагаем, что (после соответствующего расширения) $A : H \longrightarrow L_2(\Omega)$ – положительно определенный самосопряженный оператор; $Q : H \longrightarrow L_2(\Omega)$ – положительный вполне непрерывный (компактный) оператор. Это означает, что для всякого u из H выполняются неравенства

$$(Au, u)_H \geq \gamma^2 ||u||_H^2; \quad (Qu, u)_H > 0 \;\; \forall u \neq 0. \tag{3.10}$$

Пусть далее

$$b(M), \quad c(M) \in L_2(\Omega), \quad b(M) \geq 0, \quad c(M) \geq 0 \tag{3.11}$$

Тогда под операторами умножения в (3.4) будем понимать отображения

$$B : u \to bu, \quad C : u \to cu, \quad u \in H, \quad bu, cu \in L_2(\Omega). \tag{3.12}$$

Можно показать [10,51], что множество $\mathfrak{M}$ в силу компактности оператора Q является слабо замкнутым, т.е. ему принадлежит предел любой слабо сходящейся последовательности $\{u_n\} \subset \mathfrak{M}$ и что $f(u)$– непрерывный сильно выпуклый на $\mathfrak{M}$ функционал, т.е. для любых $u, v \in \mathfrak{M}$ выполняется неравенство

$$f(u) \geq f(v) + (f'v, u - v) + \mu ||u - v||_H^2, \quad \mu > 0. \tag{3.13}$$

Таким образом, задача (3.9) разрешима, так как непрерывный сильно выпуклый функционал достигает своего минимума на любом слабо замкнутом множестве [37].

Пусть u_*– решение задачи (3.9).Тогда, используя правило множителей Лагранжа, можно записать

$$f'u_* = \lambda Q u_*, \quad g(u_*) = 1. \tag{3.14}$$

Функции из $\mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)$, удовлетворяющие условиям (3.14), будем называть *стационарными точками* задачи (3.9).

И, наоборот, если $w_* \neq 0$ – решение уравнения (3.4), то $u_* = w_*/\sqrt{g(w_*)}$ – стационарная точка функционала $f(u)$ на множестве $\mathfrak{M}$.

3.1.2 Для нахождения стационарных точек задачи (3.9) можно использовать следующий итерационный процесс. Предположим, что найдено j-ое приближение $u_j \in \mathfrak{M}$, $\lambda_j \in R$. Ввведем в рассмотрение множество

$$\mathfrak{M}_j = \left\{ u \in \mathring{W}_2^{(k)}(\Omega) : (Qu_j, u - u_j) = 0 \right\} \tag{3.15}$$

и найдем элемент

$$\tilde{u}_{j+1} = arg \min_{u \in \mathfrak{M}_j} f(u). \tag{3.16}$$

Элемент $\tilde{u}_{j+1}$, доставляющий минимум выпуклому функционалу $f(u)$ на выпуклом множестве $\mathfrak{M}_j$, очевидно, существует. Необходимое условие выполнения условия (3.16) можно записать в виде

$$f'u_{j+1} = \lambda_{j+1} Q u_j, \quad \tfrac{1}{2}(Qu_j, \tilde{u}_{j+1}) = 1. \tag{3.17}$$

Учитывая, что на основании (3.17) справедливы равенства

$$f(\tilde{u}_{j+1}) = \tfrac{1}{2}(f'\tilde{u}_{j+1}, \tilde{u}_{j+1}) = \tfrac{1}{2}\lambda_{j+1}(Qu_j, \tilde{u}_{j+1}) = \lambda_{j+1},$$

$(j+1)$-ое приближение определяется так:

$$u_{j+1} = \tilde{u}_{j+1}/\sqrt{g(\tilde{u}_{j+1})}, \quad \lambda_{j+1} = f(u_{j+1}). \tag{3.18}$$

Изложенный алгоритм назван авторами *локальным методом поиска собственных чисел положительно однородного оператора* [52] (ниже для краткости – *локальный метод*). Локальный метод позволяет найти какое-либо, необязательно минимальное, собственное число. В работах [10,51] приведено доказательство сходимости и обсуждаются вопросы модификации локального метода с целью получения минимального собственного числа.

3.1.3. Уравнение (3.1) можно преобразовать к следующему виду:

$$w^{IV} + \underline{k_1 w_+ + k_2 w_-} = -\lambda w'', \tag{3.19}$$

где использованы обозначения

$$w' = \frac{dw}{d\xi}; \quad \xi = \frac{\pi}{l}x, \quad x \in [0, l]; \quad \lambda = \frac{Pl^2}{\pi^2 EI}; \quad k_i = \frac{l^4 c_i}{\pi^4 EI}. \tag{3.19$'$}$$

□ В названии статьи объектами исследования названы пластины и оболочки. Уравнение (3.19) описывает "продольный" цилиндрический изгиб пластины, под действием сжимающего усилия $T_\circ$, если положить

$$\lambda = \frac{T_\circ l^2}{\pi^2 d_\circ}, \quad k_i = \frac{l^4 c_i}{\pi^4 d_\circ}, \tag{3.19$''$}$$

или осесимметричное выпучивание цилиндрической оболочки, длиной l, толщиной h и радиусом R, если

$$k_i = \frac{l^4}{\pi^4}\left(\frac{c_i}{d_\circ} + \frac{12(1-\nu^2)}{R^2 h^2}\right). \tag{3.19$'''$}$$

Поэтому естественно рассмотреть простейший элемент конструкции – стержень. ■

Можно показать, что операторы

$$A \triangleq \frac{d^4}{d\xi^4}, \quad Q \triangleq -\frac{d^2}{d\xi^2}$$

на множестве функций

$$D_A = \left\{ w \in C^{(4)}[0,\pi] : w(0) = w(\pi) = 0, \quad w'(0) = w'(\pi) = 0 \right\},$$

плотном в гильбертовом пространстве

$$\mathring{W}_2^{(2)}(0,\pi) = \left\{ w \in W_2^{(2)} : w(0) = w(\pi) = 0, \quad w'(0) = w'(\pi) = 0 \right\},$$

удовлетворяют условиям, обеспечивающим сходимость локального метода.

Таким образом, задача (3.9) допускает следующую формулировку:

$$f(w) = \frac{1}{2}\int_0^\pi (w''^2 + k_1 w_+^2 + k_2 w_-^2) d\xi \longrightarrow \min_{w \in \mathfrak{M}},$$

$$\mathfrak{M} = \left\{ w \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(2)}(0,l) : g(w) = 1, \right\} \quad g(w) = \frac{1}{2}\int_0^\pi w'^2 d\xi. \tag{3.20}$$

При этом $(j+1)$ - ое приближение определяется соотношениями

$$\tilde{w}_{j+1} = arg \min_{w\in\mathfrak{M}_j} f(w),$$

$$\mathfrak{M}_j = \left\{ w \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(2)} : \int_0^\pi w'_j(w' - w'_j)d\xi = 0 \right\},$$

$$w_{j+1} = \tilde{w}_{j+1}/\sqrt{g(\tilde{w}_{j+1})}, \quad \lambda_{j+1} = f(w_{j+1}). \tag{3.21}$$

При использовании конечномерной аппроксимации процесс (3.21) сводится к решению последовательности задач невыпуклого квадратичного программирования.

В табл. 3.1 представлены результаты расчетов первого собственного числа P_I для продольно сжатого шарнирно опертого стержня (см. уравнение (3.19)), полученные с применением локального метода на сетке размерностью $m = 34$ при фиксированном значении параметра жесткости k_1, $(k_1 = 16)$, и значениях параметра k_2, изменяющихся от 18 до 810 [11]. Соответствующие собственные формы показаны на рис. 3.1.

Таблица 3.1

k_2	18	90	150	810
P_I	8.338	9.842	9.956	10.105
λ_1	8.309	9.797	9.909	10.055
Форма прогиба	1	2	3	4

Если прогибы стержня ограничены с одной стороны абсолютно жестким основанием $k_2 \longrightarrow \infty$, то задача (3.20) трансформируется в следующую:

$$f_\circ(w) \triangleq \frac{1}{2}\int_0^\pi (w''^2 + k_1 w^2)d\xi \longrightarrow \min_{w\in\mathfrak{M}_\circ},$$

$$\mathfrak{M}_\circ \triangleq \left\{ w \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(2)}(0,\pi) : g(w) = 1, \quad w \geq 0 \right\},$$

$$g(w) = \frac{1}{2}\int_0^\pi w'^2 d\xi = 1. \tag{3.22}$$

Задача (3.22) допускает аналитическое решение [51]. Введем обозначения

$$m_1 = \sqrt{\frac{\rho^2}{2} + \sqrt{\frac{\rho^4}{4} - \omega}}, \quad m_2 = \sqrt{\frac{\rho^2}{2} - \sqrt{\frac{\rho^4}{4} - \omega}},$$

$$l_2 = \frac{\sqrt{3}\pi}{\sqrt[4]{w}}, \quad \omega = \frac{k_1}{EI}, \quad \rho^2 = \frac{P}{EI}. \tag{3.23}$$

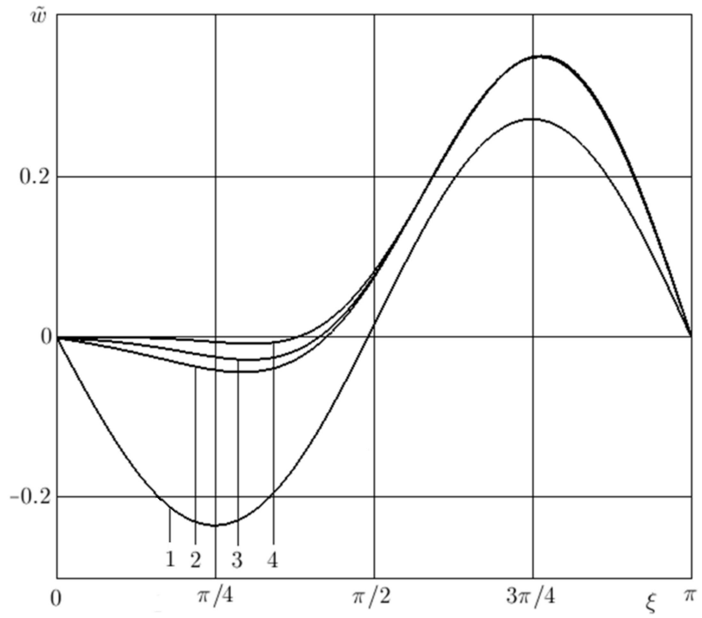


Рис. 3.1.

Если $l_2 < l$, то l_2– длина части стержня, отошедшей от жесткой стенки. Критическая сила в этом случае определяется формулой $P_{\text{кр}} = 2.5\pi^2 EI\sqrt{k_1}/l^2$, а собственная форма имеет вид

$$w(x) = A\sin^3(m_2 x)\Theta(l_2 - x), \quad A > 0, \quad x \in [0, l] \tag{3.24}$$

($\Theta(\cdot)$–функция Хевисайда).

Если же $l_2 > l$, то ограничение $w(x) \geq 0$ не влияет на решение задачи. Критическая сила при этом определяется из уравнения

$$2m_1 m_2(1 - \cos m_1 l \sin m_2 l) - (m_1^2 + m_2^2)\sin m_1 l \sin m_2 l = 0. \tag{3.25}$$

3.1.4. Задача (3.22) имеет очевидное обобщение:

$$f(u) = \tfrac{1}{2}(Au, u) \longrightarrow \min_{u \in \mathfrak{M}}$$

$$\mathfrak{M} = \left\{ u \in \mathring{W}_2^{(k)}(\Omega) : g(u) = 1, \quad u \geq 0 \right\},$$

$$g(u) = \tfrac{1}{2}(Qu, u) = 1. \tag{3.26}$$

Можно показать, что при свойствах, которыми наделены выше операторы A и Q, локальный метод, будучи примененным к задаче (3.26), сходится. В частности, решение задачи (3.22), полученное с использованием локального метода, хорошо согласуется с аналитическим решением (3.23)–(3.25).

Для проверки того, является ли найденное локальным методом собственное число минимальным, можно после нахождения $\lambda_* = \lim f(u_k)$ при $k \longmapsto \infty$ дополнительно рассмотреть следующую задачу:

$$f_1(u) \triangleq \tfrac{1}{2}((A - \lambda_* Q)u, u) \longrightarrow \min, \tag{3.27}$$

где

$$u \in \mathring{W}_2^{(k)}(\Omega), \quad u(M) \geq 0 \ \ \forall M \in \Omega. \tag{3.27$'$}$$

Если $f_1(u) \geq 0$ для всех неотрицательных $u(M)$, то λ_* является минимальным числом, при котором задача (3.27) имеет нетривиальное решение, и носит смысл критической нагрузки.

Задачи на устойчивость упругих систем при односторонних ограничениях на перемещения могут быть исследованы аналитически лишь в редких случаях (см., например, [12,53]). При численном решении задачи (3.26) с использованием конечномерной аппроксимации приходится иметь дело с задачей нелинейного программирования следующего вида:

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(Ax, x) \longrightarrow \min_{x \in R^n}, \tag{3.28_1}$$

$$g(x) = \tfrac{1}{2}(Qx, x) = 1, \tag{3.28_2}$$

$$(b_i, x) \leq 0, \quad i \in 1:m. \tag{3.28_3}$$

Пусть x_* – решение задачи (3.28). Тогда по теореме Куна-Таккера (см., например, [54]) найдутся множители Лагранжа λ_* и $\lambda_i \geq 0, \quad i \in$ $\in 1:m$, такие, что

$$Ax_* - \lambda_* Q x_* + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i = 0, \tag{3.29_1}$$

$$\lambda_i (b_i, x_*) = 0, \quad i \in 1:m, \tag{3.29_2}$$

$$\tfrac{1}{2}(Qx_*, x_*) = 1. \tag{3.29_3}$$

Умножая скалярно уравнение $(3.29)_1$ на вектор x_* и учитывая равенства $(3.29)_2$, $(3.29)_3$, получаем

$$f(x_*) = \tfrac{1}{2}\lambda_*(Qx_*, x_*) = \lambda_*. \tag{3.30}$$

Обозначим через Γ конус, определяемый неравенствами $(3.28)_3$. Так как при $x \in \Gamma$, $g(x) = 1$ выполняется условие $f(x) \geq f(x_*) = \lambda_*$, то для этих векторов

$$\tfrac{1}{2}((A - \lambda Q)x, x) = \tfrac{1}{2}(Ax, x) - \tfrac{\lambda}{2}(Qx, x) \geq \lambda_* - \lambda. \tag{3.31}$$

Введем в рассмотрение матрицу $G(\lambda) = A - \lambda Q$. Из (3.31) следует, что для всех $\lambda < \lambda_*$ матрица $G(\lambda)$ положительно определена на конусе Γ. И, наоборот, если $\lambda > \lambda_*$, то существует вектор $x \in \Gamma$, такой, что $(G(\lambda)x, x) < 0$.

Следовательно, нахождение решения задачи (3.26) сводится к отысканию числа λ, такого, при котором нарушается условие

$$(G(\lambda)x, x) \geq 0 \quad \forall x \in \Gamma.$$

Иными словами, механическая проблема устойчивости упругих систем при жестких ограничениях на перемещения сводится *к математической проблеме идентификации положительной определенности квадратичных форм на конусах.*

Необходимые и достаточные условия положительной определенности квадратичной формы в важном частном случае, когда Γ представляет собой положительный орнант в R^n, т.е.

$$\Gamma = \{x \in R^n : x_\nu \geq 0, \quad \nu \in 1 : n\},$$

установлены в работах [55,56]. Использование этих условий сопряжено с вычислением большого количества определителей (в общем случае 2^n) и является крайне трудоемким.

Задача нелинейного программирования, в которую переходит вариационная задача (3.27) в результате конечномерной аппроксимации, невырожденным линейным преобразованием $z = Vx$ трансформируется в задачу сепарабельного невыпуклого квадратичного программирования

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} \mu_\nu z_\nu^2 \longrightarrow \min_{z \in R^n}, \quad (V^* b_i, z) \leq 0, \quad i \in 1 : m,$$

для нахождения решения которой можно рекомендовать применение *метода ветвей и границ* [57].

3.1.5 Рассмотрим прямоугольную пластину с областью срединной поверхности $\Omega = \{0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b\}$, нагруженную по краям $x = 0$, $x = a$ нормальными усилиями $T_\circ$ и по всем краям– касательными усилиями $S_\circ$ при граничных условиях жесткой (подвижной) заделки или шарнирного опирания. Предполагаем, что перемещения по линиям $y = b_\circ$, $y = b_1$, $(0 < b_\circ < b_1 < b)$, ограничены абсолютно жесткими тонкими ребрами одностороннего действия. Тогда по аналогии с (3.22) рассматриваемую задачу можно сформулировать так [58]:

$$U = \frac{d_\circ}{2}\int_0^a\int_0^b [(\Delta w)^2 - (1-\nu)\Lambda(w,w)]dxdy \longrightarrow \min_{u\in\mathfrak{M}},$$

$$\mathfrak{M} = \Big\{ w \in \mathring{W}_2^{(2)}(\Omega) : g(w) = 1, \quad (\Gamma_j w)(M) = 0, \quad j = 1,2, \quad M \in \partial\Omega,$$

$$w(x, b_\circ) \geq 0, \quad w(x, b_1) \geq 0 \Big\},$$

$$g(w) = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b (T_\circ {w'_x}^2 + 2S_\circ w'_x w'_y)dxdy = 1. \qquad (3.32)$$

Если w_* – решение задачи (3.32), то критические силы определяются по формулам

$$T_* = \lambda_* T_\circ, \quad S_* = \lambda_* S_\circ, \quad \lambda_* = U(w_*).$$

Для решения задачи (3.32) применялся локальный метод с последующей проверкой результатов методом ветвей и границ. Прогиб пластины аппроксимировался двумерными интерполяционными кубическими сплайнами. Для шарнирно опертых краев использовалась также аппроксимация частичной суммой ряда Фурье.

В табл. 3.2 приведены результаты вычислений при следующих значениях параметров: $d_\circ = 1, a = 1, b = 0.2, m = 20, n = 10$ (m, n – число точек сетки, соответственно по x и по y, используемой при строении интерполяционного сплайна). При этом принимались следующие обозначения:

$\lambda_*^{(1)}$ — собственное число для шарнирно опертой пластины без ограничений на прогиб, аппроксимируемый тригонометрическим рядом;

$\lambda_*^{(2)}, \lambda_*^{(3)}$ — собственные числа для шарнирно опертой пластины, подкрепленной жесткими ребрами по линиям $y = b_\circ = b/3, y = b_1 = 2b/3$ при аппроксимации прогиба соответственно рядом Фурье и сплайнами;

$\lambda_*^{(4)}$ — собственное число для пластины с подвижным жесткими краями без ограничений на прогиб при аппроксимации сплайнами;

$\lambda_*^{(5)}$ — собственное число для пластины с подвижными жесткими краями, подкрепленной ребрами по линиям $y = b_\circ = b/3, y = b_1 = 2b/3$, при аппроксимации сплайнами.

Таблица 3.2

T, S / λ_*	3;1	2;1	1;0	1;1	1;2	1;3	1;4	1;5
$\lambda_*^{(1)}$	313.0	444.6	988.4	723.6	492,1	366.1	290.3	240.1
$\lambda_*^{(2)}$	357.2	514.9	1106	869.2	607.6	449.0	354.7	293.1
$\lambda_*^{(3)}$	357.4	515.7	1107	871.0	599.6	443.2	351.0	288.7
$\lambda_*^{(4)}$	551.0	775.7	1757	1237	827	611.5	485	399.2
$\lambda_*^{(5)}$	750.2	1049	2384	1640	1079	790.5	623.6	513.7

Формы потери устойчивости пластины с жестко защемленными краями при $T_\circ = 3, S_\circ = 1$ показаны на рис. 3.2, а (без ограничений на прогиб) и 3.2, б (жесткие ребра при $y = b/3, y = 2b/3$). При отсутствии ребер выпуклости имеются по обе стороны срединной плоскости недеформированной пластины (см. рис. 3.2, а), а при наличии ребер выпуклости расположены по одну сторону срединной плоскости (см. рис. 3.2, б).

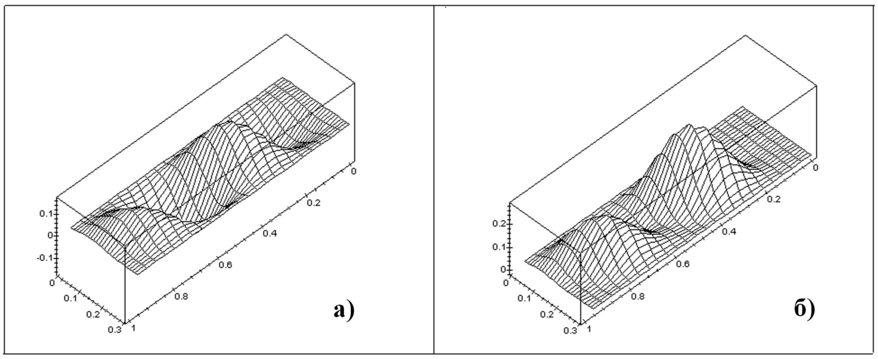


Рис. 3.2.

Изложенная выше задача в работе [59] была переформулирована (усложнена) следующим образом. Вместо абсолютно жестких ребер рассматривалась система из k упругих "ребер", реагирующих на поперечное выпучивание пластины в сторону $w < 0$ как одномерные винклеровы основания (ребра) с жесткостями $\beta_{æ}$, $æ \in 1 : k$. При этом автор ограничился рассмотрением случая шарнирно опертой пластины. Для решения уравнений Ка́рмана формально расписывалась итерационная схема стационарного метода Ричардсона [60], которая в последующем распространялась на задачи минимизации соответствующих энергетических функционалов. Искомые функции $w(x, y), \Phi(x, y)$ при переходе к конечномерной аппроксимации приближались кубическими сплайнами двух переменных [61]. В результате исходная проблема устойчивости и закритического поведения пластины при односторонних упругих ограничениях свелась к решению двух задач выпуклого квадратичного программирования. Результаты численных экспериментов представлены в виде графиков с использованием линий уровня.

3.2. Комбинированный алгоритм „ППВ+ЛПВ“

Алгоритм *полного перебора вариантов* (ППВ) для решения одномерной спектральной задачи (3.1) впервые применялся в работе [58]. Поясним порядок реализации алгоритма ППВ. Уравнение (3.2), преобразованное к виду (3.19), с использованием конечно-разностной аппроксимации на сетке с узлами $\xi_i = ih, i \in 0 : m, \quad h = \pi/m$ заменяем однородной системой алгебраических уравнений. Некоторая интрига в этой, вообще говоря, рутинной процедуре связана с аппроксимацией подчеркнутых в уравнении (3.19) нелинейных слагаемых.

Введем т.н. *вектор формы*

$$b = [b_1, b_2, ..., b_{m-1}]^{\oplus}, \tag{3.33}$$

где $\oplus$ – знак транспонирования,

$$b_i = \begin{cases} 1, & w_i > 0 \\ 0, & w \le 0 \end{cases}, \quad w_i \triangleq w(\xi_i). \tag{3.33$'$}$$

С использованием компонент вектора формы названные нелинейные слагаемые аппроксимируются с помощью формул

$$w_+(\xi_i) = b_i w_i, \quad w_-(\xi_i) = (1 - b_i) w_i. \tag{3.34}$$

В окончательном виде аппроксимирующаяся система алгебраических уравнений содержит $2m - 1$ неизвестных:

$w_i, i \in 1 : m - 1$ — компоненты искомого вектора $\tilde{w} = [w_1, w_2, ..., w_{m-1}]^{\oplus}$;

$b_i, i \in 1 : m - 1$ — компоненты вектора формы, рассматриваемые как параметры системы уравнений;

λ — собственное число, т.е. такое, при котором определитель линейной однородной системы уравнений обращается в нуль.

Придавая параметрам b_i значения 0 или 1 в различных сочетаниях, придем к 2^{m-1} вариантам вектора формы. Фиксируя тот или иной вариант вектора формы, будем иметь детерминированную спектральную задачу в R^{m-1}. Решив ее, запоминаем собственное число и собственную форму $\tilde{w}$ (или $-\tilde{w}$), если последняя согласуется с выбранным вектором формы. После перебора всех вариантов вектора формы определяем наименьшее собственное число для сетки размерностью m. В общем случае в зависимости от m алгоритм ППВ позволяет находить не только первое собственное число, но и часть собственного спектра. Однако практическая реализация алгоритма ППВ наталкивается на ситуацию, которую Р. Беллман называл "проклятием размерности": при использовании этого алгоритма "вслепую"на сетке размерностью m необходимо решать 2^{m-1} линейных спектральных задач в R^{m-1}.

В работе [62] предложен комбинированный алгоритм "ППВ+ЛПВ" (ЛПВ - *локальный перебор вариантов*) который заключается в следующем. Сначала на редкой сетке, т.е. такой, чтобы 2^{m-1} было не слишком большим числом, реализуется алгоритм ППВ и устанавливается *качественно адекватная собственная форма*, имеющая устойчивый с ростом m вид графика (например, собственная форма с двумя полуволнами). Затем применяется алгоритм ЛПВ, который заключается в том, что число узлов сетки последовательно удваивается делением пополам, а перебор вариантов производится лишь вблизи корней эволюционирующей собственной формы. Процесс продолжается до тех пор, пока соответствующее собственное значение не стабилизируется с требуемой (и достижимой) точностью.

При этом могут быть использованы две схемы перебора вариантов.

Первая схема ЛПВ основана на предположении, что при удвоении числа узлов сетки точка пересечения графиком приближенной собственной формы оси ξ не выйдет за пределы интервала $[\xi_i, \xi_{i+1}]$. По этой схеме для каждого корня собственной формы реализуются два варианта вычислений (рис. 3.3):

$$1)\, b_{2j+1} = 1, \quad 2)\, b_{2j+1} = 0. \tag{3.35}$$

Таким образом, при наличии p корней собственной формы перебору подлежит 2^p вариантов вектора формы.

Вторая схема ЛПВ основана на предположении, что при удвоении числа узлов сетки точка пересечения графиком собственной формы оси ξ может выйти за пределы интервала, в котором она располагалась до удвоения числа узлов сетки (см. рис. 3.3).
Вторая схема сводится к перебору четырех вариантов для каждого корня собственной формы:

$$1) \;\; b_{2i} = b_{2i+1} = b_{2i+2} = 0,$$

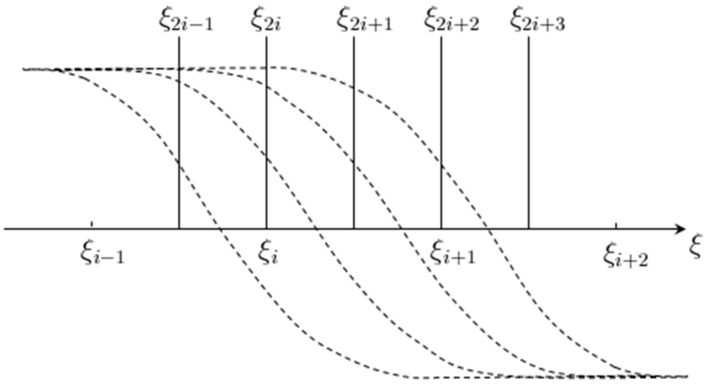


Рис. 3.3.

$$2)\ \ b_{2i} = 1, \quad b_{2i+1} = b_{2i+2} = 0,$$

$$3)\ \ b_{2i} = b_{2i+1} = 1, \quad b_{2i+2} = 0,$$

$$4)\ \ b_{2i} = b_{2i+1} = b_{2i+2} = 1. \tag{3.36}$$

При наличии p корней собственной формы реализация второй схемы ЛПВ предполагает перебор 2^{2p} вариантов собственного вектора.

Обратимся вновь к табл. 3.1, где (наряду с P_I) приведены значения первого собственного числа λ_1, полученные с применением первой схемы ЛПВ (ППВ при $m = 8$, ЛПВ при $m = 16, 32$). Как уже было сказано параметр k_1 фиксировался ($k_1 = 16$) , а параметр k_2 изменялся от $k_2 = 18$ до $k_2 = 810$.

Из рис. 3.1 видно, что полуволна $w < 0$ с ростом как бы вытесняется в сторону винклеровой среды меньшей жесткости.

С учетом того, что локальный метод и комбинированный алгоритм перебора вариантов оценивают собственные числа сверху, можно заключить о более точной оценке первого собственного числа при использовании алгоритма "ППВ+ЛПВ"($\lambda_1(k_2) < P_I(k_2)$).

С применением алгоритма ППВ решалась задача об устойчивости осесимметрично изгибаемой круглой пластины на границе винклеровых сред от действия равномерно распределенной по контуру радиально сжимающей нагрузки [63]. Позднее эта же задача исследовалась с помощью комбинированного алгоритма "ППВ+ЛПВ" [64]. Последний из названных алгоритмов применялся также для решения задачи на устойчивость в рамках осесимметричной деформации продольно сжимаемой цилиндрической оболочки (в частности, с учетом поперечных сдвигов по модели С.П. Тимошенко) при внешних и внутренних односторонних ограничениях винклерового типа [66-68].

3.3. Алгоритм движения по параметру жесткости

3.3.1. Иллюстрация применения алгоритма

Ниже излагается *алгоритм движения по параметру жесткости* одной из разномодульных упругих сред, альтернативный комбинированному алгоритму „ППВ+ЛПВ“.

Поясним этот алгоритм на примере продольно сжимаемого шарнирно опертого стержня на границе винклеровых сред с параметрами жесткости $k_1 = 20$, $k_2 = 25$. Сначала рассматриваем случай однородной упругой среды с параметрами жесткости $k_1 = k_2 \triangleq k = 20$. Собственные числа для этого случая определяются по формуле [41]

$$\lambda_{(n)} = n^2 + \frac{k}{n^2}, \tag{3.37}$$

где n – число полуволн собственной формы

$$w(\xi) = B \sin n\xi,\ \xi \in [0, \pi]. \tag{3.38}$$

Выясним, какому значению n отвечает минимальное собственное число λ_1 при $k = 20$. На основании формулы (3.37) получаем

$$\lambda_{(1)} = 21,\ \lambda_{(2)} = 9,\ \lambda_{(3)} = 11.22,\ \lambda_{(4)} = 17.25.$$

Отсюда следует, что

$$\lambda_1 = \lambda_{(2)} = 9,\ \lambda_2 = \lambda_{(3)} = 11.22,\ \lambda_3 = \lambda_{(4)} = 17.25 \text{ и т.д.}$$

Таким образом, минимальному собственному числу ($\lambda_1 = 9$) отвечает двухполуволновая собственная форма.

Далее решаем эту же задачу с использованием конечно-разностной аппроксимации на достаточно густой сетке. В данном случае принимаем $m = 100$ и получаем $\lambda_1 = 9.0065$. Соответствующую этому числу собственную форму рассматриваем как качественно адекватную для случая $k_1 = 20$, $k_2 = 21$. Используя перебор возможных вариантов, будем проверять на соответствие следующие векторы формы:

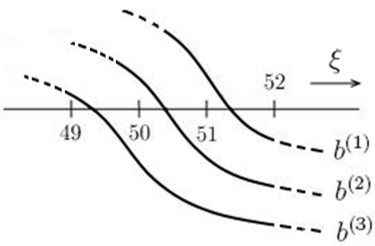


Рис. 3.4.

$$b^{(1)} = (b_i = 1, i \in 1:51; b_i = 0, i \in 52:99),$$

$$b^{(2)} = (b_i = 1, i \in 1:50; b_i = 0, i \in 51:99),$$

$$b^{(3)} = (b_i = 1, i \in 1:49; b_i = 0, i \in 50:99).$$

В случае $k_1 = 20$, $k_2 = 21$ векторы формы $b^{(1)}$, $b^{(3)}$ не приводят к согласованному решению, а непротиворечивому варианту $b^{(2)}$ отвечает собственное число $\lambda_1 = 9.129$. Полученную при этом собственную форму принимаем за качественно адекватную для случая $k_1 = 20$, $k_2 = 22$. Вариант $b^{(2)}$ дает решение $\lambda_1 = 9.243$. Продолжая процесс, получаем результаты, представленные в таблице

Таблица 3.3

k_2	21	22	23	24	25
$b^{(i)}$	$b^{(2)}$	$b^{(2)}$	$b^{(2)}$	$b^{(1)}$	$b^{(1)}$
λ_1	9.129	9.243	9.346	9.443	9.532

3.3.2. Учет трансверсальных сдвигов в уравнении продольно-поперечного изгиба стержня

Рассмотрим продольно-поперечный изгиб стержня с учетом сдвигов по модели С.П.Тимошенко. Свяжем со стержнем прямоугольную декартову систему координат $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ так, чтобы продольная ось $x_1 \triangleq x$ соединяла центры тяжести поперечных сечений, а ось $x_3 \triangleq \xi$ проходила по линии симметрии поперечного сечения стержня. Предполагаем, что поперечная погонная нагрузка q действует в плоскости $(x_1,\ x_3)$, а продольная сжимающая сила направлена по оси x_1. Кроме этого считаем, что изгибная жесткость относительно оси x_2 намного меньше соответствующей жесткости относительно оси x_3, т.е.

$$I \triangleq I_2 \equiv \int_{(S)} \xi^2 dS \ll \int_{(S)} x_2^2 dS \equiv I_3, \tag{3.39}$$

где (S) – область поперечного сечения стержня.

При названных условиях реализуется продольно-поперечный изгиб в плоскости $(x_1,\ x_3)$.

Как известно, продольная деформация поперечно изгибаемой балки в соответствии с гипотезой плоских (нормальных) сечений определяется по формуле

$$e_{11}^{\xi}{}' = \xi/\rho \approx -w''\xi, \tag{3.40}$$

где $1/\rho$ – кривизна изогнутой оси балки, w – прогиб балки, $w'' \triangleq d^2w/dx^2$.

Если имеет место поперечный сдвиг $\alpha_{13} \triangleq \psi$ волокон x_1 и x_3, то ему отвечает дополнительная продольная деформация

$$e_{11}^{\xi}{}'' = \frac{\psi(x+dx)\xi - \psi(x)\xi}{dx} = \psi'(x)\xi. \tag{3.41}$$

Изменением длины оси стержня от действия продольных сил пренебрегаем, считая стержень гибким. Тогда полная продольная деформация слоя $\xi = const$ за счет поперечного изгиба стержня (балки) определяется формулой

$$e_{11}^{\xi} = e_{11}^{\xi}{}' + e_{11}^{\xi}{}'' = (-w'' + \psi')\xi. \tag{3.42}$$

Принимая статическую гипотезу о том, что напряжения на площадках, паралельных оси стержня, пренебрежимо малы по сравнению с напряжениями в поперечных сечениях, получаем

$$\sigma_{11}^{\xi} = Ee_{11}^{\xi} = E(-w'' + \psi')\xi, \tag{3.43}$$

где E – модуль Юнга материала балки.

Как известно, сдвиг α_{13} связан с компонентами тензора малых деформаций Коши e_{ij}^{ξ} формулой (см., например, [23])

$$\sin\alpha_{13} = \frac{2e_{13}^{\xi}}{\sqrt{1+2e_{11}^{\xi}}\sqrt{1+2e_{33}^{\xi}}}.$$

Отсюда с учетом того, что деформации e_{ij}^{ξ} малы по сравнению с единицей, имеем

$$e_{13}^{\xi} \approx {}^1\!/_2\alpha_{13} \equiv {}^1\!/_2\psi,$$

и поэтому в соответствии с законом Гука справедлива формула

$$\sigma_{13}^{\xi} = 2\mu e_{13}^{\xi} = \mu\psi, \tag{3.44}$$

где μ – модуль сдвига: $\mu = E/2(1+\nu)$; ν – коэффициент Пуассона.

Упругая энергия балки, длиной l и площадью поперечного сечения S, определяется соотношением

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\int_0^l \left[\int_{(S)} (\sigma_{11}^{\xi}e_{11}^{\xi} + 2\sigma_{13}^{\xi}e_{13}^{\xi})dS\right]dx = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^l \left[EI(-w''+\psi')^2 + \mu S\psi^2\right]dx. \end{aligned} \tag{3.45}$$

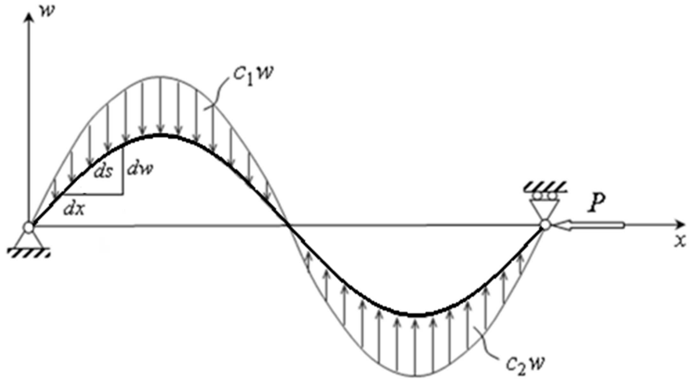


Рис. 3.5.

Далее получим формулу для работы, совершаемой продольной силой P. В соответствии с рис.3.5 имеем

$$A_P = P\int_0^l (ds - dx) = P\int_0^l (\sqrt{1+w'^2} - 1)dx \approx \frac{1}{2}P\int_0^l w'^2 dx. \qquad (3.46)$$

Учитывая, что работа погонной поперечной силы q определяется по формуле

$$A_q = \int_0^l qw dx, \qquad (3.47)$$

приходим к следующему выражению для полной потенциальной энергии продольно-поперечного изгиба стержня (балки) с учетом трансверсальных сдвигов:

$$\Pi = U - A_P - A_q = \int_0^l F(w, w', w'', \psi, \psi')dx, \qquad (3.48)$$

где

$$F = \tfrac{1}{2}EI(-w'' + \psi')^2 + \frac{1}{2}\mu S\psi^2 - qw - \frac{1}{2}Pw'^2. \qquad (3.48')$$

Уравнения Эйлера для функционала (3.48) определяются равенствами

$$\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial w'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial w''} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \psi} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial \psi'} = 0$$

и имеют вид

$$EIw^{IV} = q + EI\psi''' - Pw'', \tag{3.49$_1$}$$

$$EI(-w'' + \psi')' = \mu S\psi. \tag{3.49$_2$}$$

Для получения единого разрешающего уравнения продольно-поперечного изгиба, воспользуемся уравнениями равновесия элемента балки

$$\frac{dM}{dx} = Q, \;\; \frac{dQ}{dx} = -q, \tag{3.50}$$

где

$$M = \int_{(S)} \sigma_{11}^{\xi}\xi dS = EI(-w'' + \psi'),$$

$$Q = \int_{(S)} \sigma_{13}^{\xi} dS = \mu S\psi. \tag{3.50$'$}$$

Очевидно, что соотношение $(3.49)_2$ представляет собой первое уравнение равновесия (3.50), записанное с учетом формул (3.50′). Неиспользованным осталось второе уравнение (3.50), из которого, принимая во внимание вторую формулу (3.50′), получаем

$$\psi' = -\frac{1}{\mu S}q. \tag{3.51}$$

Исключив с помощью равенства (3.51) функцию $\psi(x)$ из уравнения $(3.49)_1$, окончательно будем иметь

$$EIw^{IV} = q - \tilde{h}_{\psi}^2 q'' - Pw'', \tag{3.52}$$

где $\tilde{h}_{\psi}^2$ – параметр, связанный с учетом поперечных сдвигов (см. форм. $(1.22)_1$):

$$\tilde{h}_{\psi}^2 = EI/\mu S. \tag{3.53}$$

Уравнение (3.52) является уравнением Эйлера-Пуассона для функционала

$$J(w) = \int_0^l ({}^1\!/\!_2 EIw''^2 - {}^1\!/\!_2 Pw'^2 - qw + \tilde{h}_{\psi}^2 q'' w)dx. \tag{3.54}$$

3.3.3. Постановка спектральной задачи при учете поперечных сдвигов

Учитывая, что поперечную нагрузку при деформации продольно сжатого стержня составляют реакции винклеровых сред, т.е.

$$q = c_1 w_+ + c_2 w_-, \tag{3.55}$$

уравнение (3.52) трансформируется в следующее:

$$EIw^{IV} + c_1 w_+ + c_2 w_- - \tilde{h}_\psi^2 (c_1 w_+ + c_2 w_-)'' = -Pw''. \tag{3.56}$$

Ограничимся рассмотрением краевых условий шарнирного опирания, которые с учетом первого равенства (3.50′) имеют вид

$$w = 0,\ M = EI(-w'' + \psi') = 0 \text{ при } x = 0,\ x = l. \tag{3.57}$$

Принимая во внимание равенства (3.51), (3.55), второе условие (3.57) можно преобразовать так:

$$w'' - \psi' = w'' - \frac{1}{\mu S}(c_1 w_+ + c_2 w_-) = w'' = 0.$$

Таким образом, граничные условия шарнирного опирания при поперечной нагрузке в виде реакций винклеровой среды записываются так же, как и в случае классической теории изгиба балок:

$$w = 0,\ w'' = 0 \text{ при } x = 0,\ x = l. \tag{3.58}$$

Выполним в уравнении (3.56) и в функционале (3.54) при учете соотношения (3.55) замену по формулам (3.19′). Записывая функционал с точностью до постоянного множителя, будем иметь:

$$w^{IV} + k_1 w_+ + k_2 w_- - \varkappa^2 (k_1 w_+ + k_2 w_-)'' = -\lambda w''; \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned} \tilde{J}(w) = \frac{1}{2}\int_0^\pi \big[& w''^2 + k_1 w_+^2 + k_2 w_-^2 - \lambda w'^2 + \\ & + \varkappa^2 (k_1 w_+ + k_2 w_-) w'' \big]\, d\xi, \end{aligned} \tag{3.60}$$

где дополнительно принято обозначение

$$\varkappa^2 = \pi^2 \tilde{h}_\psi^2 / l^2. \tag{3.61}$$

Рассмотрим, в частности, случай $k_1 = k_2 \stackrel{\Delta}{=} k$. Уравнение (3.59) для однородной винклеровой среды принимает вид

$$w^{IV} + (\lambda - \varkappa^2 k)w'' + kw = 0. \tag{3.62}$$

Учитывая, что спектральная задача $\{(3.62),\ (3.58)\}$ при $\varkappa^2 = 0$ имеет решение (3.37), (3.38), сразу можно записать

$$\lambda_{(n)} = n^2 + \frac{k}{n^2} + \varkappa^2 k,\ \ w = B \sin n\xi. \tag{3.63}$$

Выявим значимость связанного с учетом поперечных сдвигов последнего слагаемого в формуле для $\lambda_{(n)}$. Зададимся вопросом: при каком n отношение

$$\mu_{(n)} = \frac{\varkappa^2 k}{\lambda_{(n)}} \tag{3.64}$$

принимает максимальное значение?

В результате элементарных преобразований устанавливаем, что максимум $\mu_{(n)}$ достигается при $n = [\sqrt[4]{k}]$, где квадратные скобки означают целую часть заключенного в них числа. При этом само отношение (3.64) принимает вид

$$\max \mu_{(n)} = \frac{\varkappa^2 n^2}{2 + \varkappa^2 n^2}.$$

Если положить, например, $\varkappa^2 = 4 \cdot 10^{-3},\ k = 10^4$, то получим

$$\max \mu_{(n)} = \mu_{(10)} = 0.1667.$$

3.3.4. Конечно-разностная аппроксимация

Заменим формулу (3.60) приближенной с использованием дискретного представления функции $w(\xi),\ \xi \in [0, \pi]$ на сетке

$$w_i \stackrel{\Delta}{=} w(\xi_i), i \in -1 : m+1,\ \xi_{i+1} = \xi_i + h,\ h = \pi/(m+2),$$
$$\xi_{-1} = 0,\ \xi_{m+1} = \pi. \tag{3.65}$$

Интегралы вычисляем по формуле трапеций, производные аппроксимируем конечно-разностными отношениями

$$w'(\xi_i) = \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h},\ w''(\xi_i) = \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2};$$
$$w'(\xi_{-1}) = \frac{-3w_{-1} + 4w_0 - w_1}{2h},\ w'(\xi_{m+1}) = \frac{w_{m-1} - 4w_m + 3w_{m+1}}{2h},$$
$$w''(\xi_{-1}) = \frac{w_{-1} - 2w_0 + w_1}{h^2},\ w''(\xi_{m+1}) = \frac{w_{m-1} - 2w_m + w_{m+1}}{h^2}. \tag{3.66}$$

Значения срезок функции $w(\xi)$ в узлах сетки представляем соотношениями (3.34).

Граничные условия шарнирного опирания

$$w(0) = w(\pi) = 0,\ w''(0) = w''(\pi) = 0$$

в терминах дискретных значений функции $w(\xi)$ можно записать так:

$$w_{-1} = w_{m+1} = 0,\ w_0 = w_1/2,\ w_m = w_{m-1}/2. \tag{3.67}$$

С учетом соотношений (3.34) энергию деформации винклеровых сред (с точностью до постоянного множителя) можно представить формулой

$$\frac{h}{2}\sum_{i=1}^{m-1}\left[c_i(k_1 b_i^2 + k_2(1-b_i)^2)\right] w_i^2 \triangleq \frac{1}{2}\tilde{w}^T C\tilde{w}, \tag{3.68}$$

где

$$\tilde{w} = [w_1, w_2, \ldots, w_{m-1}]^{\oplus}, C = h\,\mathrm{diag}\left[c_1\tilde{b}_1,\ \ldots, c_{m-1}\tilde{b}_{m-1}\right],$$

$$\tilde{b}_i \triangleq k_1 b_i + k_2(1-b_i),\ c_1 = c_{m-1} = 1.5,\ c_i = 1, i \in 2:m-2. \tag{3.68'}$$

(В выражении для матрицы C на основании формулы (3.33′) вместо b_i^2, $(1-b_i)^2$ записано b_i, $1-b_i$.)

Функционал (3.60) с использоваанием формул (3.66), (3.68) заменяем следующим приближенным выражением:

$$\tilde{J}(\tilde{w}) = {}^1\!/_2\tilde{w}^{\oplus}A\tilde{w} + {}^1\!/_2\tilde{w}^{\oplus}C_1\tilde{w} - {}^1\!/_2\lambda\tilde{w}^{\oplus}Q\tilde{w}, \tag{3.69}$$

где

$$A = \frac{1}{h^3}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 & & & & \\ a_{21} & 6 & -4 & 1 & & & \mathbf{0} \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ & . & . & . & . & . & \\ & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & \mathbf{0} & & 1 & -4 & 6 & a_{m-2,m-1} \\ & & & & 1 & a_{m-1,m-2} & a_{m-1,m-1} \end{bmatrix}, \tag{3.69$'$)$_1$}$$

$$Q = \frac{1}{4h}\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & -1 & & & & \\ q_{21} & 2 & 0 & -1 & & & \mathbf{0} \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & & \\ & . & . & . & . & . & \\ & & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ & \mathbf{0} & & -1 & 0 & 2 & q_{m-2,m-1} \\ & & & & -1 & q_{m-1,m-2} & q_{m-1,m-1} \end{bmatrix}, \tag{3.69$'$)$_2$}$$

$$C_1 = C -$$

$$-\frac{\varkappa^2}{h}\begin{bmatrix} c_{11}\bar{b}_1 & \frac{\bar{b}_1+\bar{b}_2}{2} & & & \mathbf{0} \\ \frac{\bar{b}_1+\bar{b}_2}{2} & -2\bar{b}_2 & \frac{\bar{b}_2+\bar{b}_3}{2} & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \frac{\bar{b}_{m-3}+\bar{b}_{m-2}}{2} & -2\bar{b}_{m-2} & \frac{\bar{b}_{m-2}+\bar{b}_{m-1}}{2} \\ \mathbf{0} & & & \frac{\bar{b}_{m-2}+\bar{b}_{m-1}}{2} & c_{m-1,m-1}\bar{b}_{m-1} \end{bmatrix}. \qquad (3.69')_3$$

В формулах $(3.69')$ для рассматриваемого здесь случая шарнирно опертого стержня следует положить

$$a_{11} = a_{m-1,m-1} = 3.25,\ a_{12} = a_{21} = a_{m-1,m-2} = a_{m-2,m-1} = -3.5,$$

$$q_{11} = q_{m-1,m-1} = 2.75,\ q_{12} = q_{21} = q_{m-1,m-2} = q_{m-2,m-1} = -0.5,$$

$$c_{11} = c_{m-1,m-1} = 1.5. \qquad (3.70)$$

Необходимое условие минимума функционала (3.69) имеет вид

$$\nabla_{\tilde{w}}\tilde{J}(\tilde{w}) = A\tilde{w} + C_1\tilde{w} - \lambda Q\tilde{w} = 0. \qquad (3.71)$$

При отсутствии симметрии балки относительно сечения $x = l/2$ $(\xi = \pi/2)$, осуществляя переход от винклеровых сред с жескостями $k_1,\ k_1 + z\Delta k$ к случаю $k_1,\ k_1 + (z+1)\Delta k$, приходится выполнять локальный перебор вариантов вектора формы вслепую, например, по первой или второй схеме ЛПВ. Однако в случае одинаковых граничных условий на краях $x = 0,\ x = l$ число вариантов сокращается в связи с предсказуемостью эволюции собственной формы при увеличении параметра жесткости k_2. Например, в п.**3.3.1** рассматривались три „возможных“ варианта вектора формы $b^{(1)},\ b^{(2)},\ b^{(3)}$. Однако очевидно, что при увеличении жесткости k_2 точка, являющаяся корнем собственной формы, может перемещаться по оси ξ лишь вправо (см. рис. 3.5) и поэтому форму $b^{(3)}$ следует исключать из числа возможных.

Несложный анализ эволюции собственной формы позволяет минимизировать число вариантов вектора формы для симметричной относительно сечения $x = l/2$ конструкции.

Пусть собственная форма при $k_1 = k_2 \overset{\Delta}{=} k$ имеет $p = n - 1$ корней, и пусть при жесткостях $k_1,\ k_1 + z\Delta k$ j-ый корень собственной формы принадлежит интервалу (ξ_{s_j}, ξ_{s_j+1}). Тогда при переходе от случая $k_1,\ k_1 + z\Delta k$ к случаю $k_1,\ k_1 + (z+1)\Delta k$ достаточно рассмотреть варианты:

p - четное число

$$b_i^{(1)} = \begin{cases} 1, & i \in 1 : s_1 \\ 0, & i \in s_1+1 : s_2 \\ 1, & i \in s_2+1 : s_3 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0, & i \in s_{p-1}+1 : s_p \\ 1, & i \in s_p+1 : m-1, \end{cases} \qquad b_i^{(2)} = \begin{cases} 1, & i \in 1 : s_1+1 \\ 0, & i \in s_1+2 : s_2-1 \\ 1, & i \in s_2 : s_3+1 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0, & i \in s_{p-1}+2 : s_p-1 \\ 1, & i \in s_p : m-1; \end{cases} \tag{3.72$_1$}$$

p - нечетное число

$$b_i^{(1)} = \begin{cases} 1, & i \in 1 : s_1 \\ 0, & i \in s_1+1 : s_2 \\ 1, & i \in s_2+1 : s_3 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1, & i \in s_{p-1}+1 : s_p \\ 0, & i \in s_p+1 : m-1, \end{cases} \qquad b_i^{(2)} = \begin{cases} 1, & i \in 1 : s_1+1 \\ 0, & i \in s_1+2 : s_2-1 \\ 1, & i \in s_2 : s_3+1 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1, & i \in s_{p-1} : s_p+1 \\ 0, & i \in s_p+2 : m-1. \end{cases} \tag{3.72$_2$}$$

Рассмотрим эволюцию трехполуволновой собственной формы при увеличении параметра жесткости k_2. Нетрудно убедиться, что при $\varkappa^2 = 0$, $k = 36$ минимальному собственному числу отвечают две собственные формы, так как (см. форм. (3.37))

$$\lambda_1 = \lambda_{(2)} = \lambda_{(3)} = 13.$$

Поэтому, задавшись целью исследовать эволюцию трехполуволновой собственной формы при $k_2 \to \infty$, примем $k_1 = 37$. Тогда в случае однородной среды в соответствии с формулой (3.63) при $\varkappa^2 = 0.004$ получим

$$\lambda_{(1)} = 38.15,\ \lambda_{(2)} = 13.40,\ \lambda_{(3)} = 13.26,\ \lambda_{(4)} = 18.46.$$

Таким образом, имеем

$$\lambda_1 = \lambda_{(3)} = 13.26.$$

В этом случае $p = 2$ и формулы (3.72)$_1$ принимают вид (рис.3.6)

$$b_i^{(1)} = \begin{cases} 1, & i \in 1 : s_1 \\ 0, & i \in s_1+1 : s_2 \\ 1, & i \in s_2+1 : m-1, \end{cases} \qquad b_i^{(2)} = \begin{cases} 1, & i \in 1 : s_1+1 \\ 0, & i \in s_1+2 : s_2-1 \\ 1, & i \in s_2 : m-1. \end{cases} \tag{3.73}$$

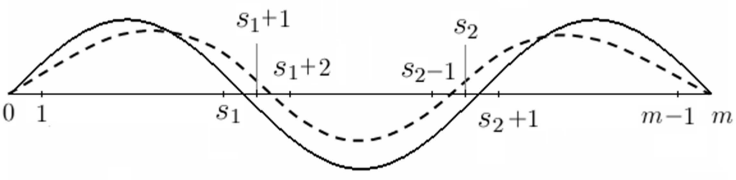


Рис. 3.6.

Приближенное решение на основе конечно-разностной аппроксимации при $m = 100$ для случая $k_1 = k_2 = 37$, $\varkappa^2 = 0.004$ имеет вид

$$\lambda_1 = \lambda_{(3)} = 13.286.$$

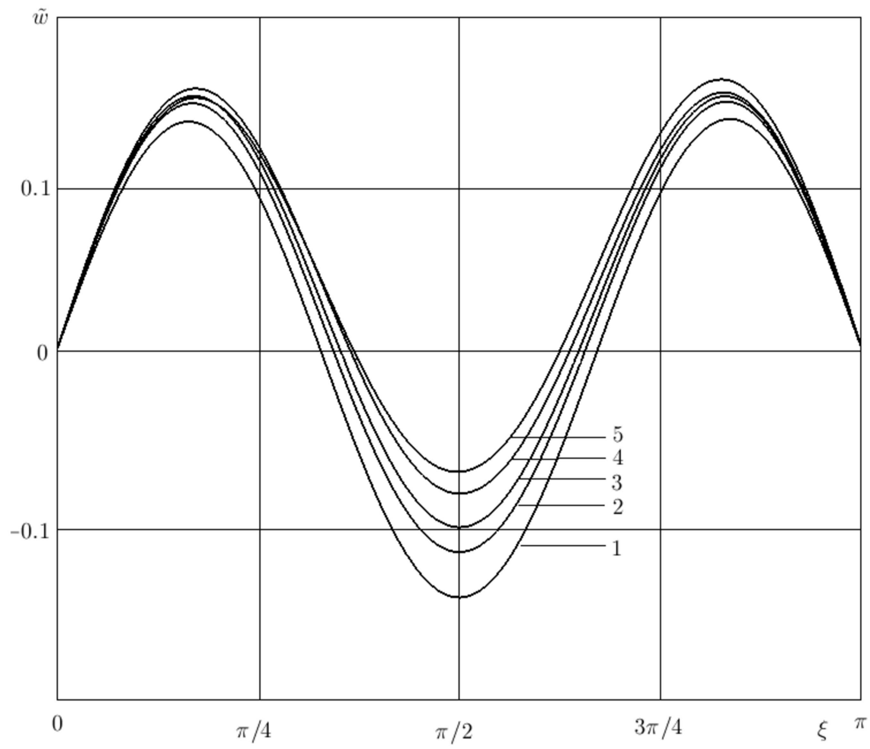
При этом корни собственной формы содержатся в интервалах (ξ_{33}, ξ_{34}), (ξ_{66}, ξ_{67}) и формулы (3.73) принимают вид

$$b_i^{(1)} = \begin{cases} 1, & i \in 1:33 \\ 0, & i \in 34:66 \\ 1, & i \in 67:99, \end{cases} \quad b_i^{(2)} = \begin{cases} 1, & i \in 1:34 \\ 0, & i \in 35:65 \\ 1, & i \in 66:99. \end{cases}$$

Выборочные результаты расчетов[2] можно представить в виде следующих таблицы и рисунка:

k_2	37	50	60	80	100
λ	13.286	13.681	13.888	14.174	14.366
Собственная форма	1	2	3	4	5
$[\xi_{s_1},\ \xi_{s_1+1}]$ $[\xi_{s_2},\ \xi_{s_2+1}]$	$[\xi_{33},\ \xi_{34}]$ $[\xi_{66},\ \xi_{67}]$	$[\xi_{34},\ \xi_{35}]$ $[\xi_{65},\ \xi_{66}]$	$[\xi_{35},\ \xi_{36}]$ $[\xi_{64},\ \xi_{65}]$	$[\xi_{36},\ \xi_{37}]$ $[\xi_{63},\ \xi_{64}]$	$[\xi_{37},\ \xi_{38}]$ $[\xi_{62},\ \xi_{63}]$

[2]Расчеты выполнены Е.В.Тулубенской



Литература[3]

49*. **Тимошенко С.П.** Устойчивость упругих систем/ С.П. Тимошенко.– М.-Л.: ОГИЗ, 1946. – 839с.

50*. **Михлин С.Г.** Линейные уравнения в частных производных/ С.Г. Михлин. – М.: Высшая школа, 1977. – 431 с.

51. **Тарасов В.Н.** Некоторые задачи и методы конструктивно-нелинейной механики упругих систем. Под ред. проф. Е.И. Михайловского/ В.Н. Тарасов, Д.В. Холмогоров. – Сыктывкар: Изд-во Сыкт. ун-та, 2001.– 189с.

52. **Михайловский Е.И.** Локальный метод поиска собственных чисел положительно однородного оператора: тез. докл./Е.И. Михайлов-

[3]Начало библиографического списка см. в первой части статьи

ский, В.Н. Тарасов//*Международная научн. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения Н.Г. Чеботарева.– Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1994. – С. 88.*

53. **Михайловский Е.И.** Закритическое поведение продольно сжа того стержня с жесткими ограничениями на прогиб/ Е.И.Михайловский, В.Н. Тарасов, Д.В. Холмогоров.//*АН СССР.ПММ. –1985.– – Т.49, вып.1. – С. 156-160.*

54*. **Моисеев Н.Н.** Методы оптимизации/ Н.Н. Моисеев, Ю.П. Иванилов, Е.М. Столярова. – М.: Наука, 1978. – 325 с.

55*. **Рапопорт Л.Б.** Устойчивость по Ляпунову и знакоопределенность квадратичной формы на конусе/ Л.Б. Рапопорт// *РАН. ПММ.– 1986. – Т. 50, вып. 4.– С. 674-679.*

56*. **Крепс В.Л.** О квадратичных формах, неотрицательных на ортанте/ В.Л. Крепс//*ЖВМ и МФ. – 1984. – Т. 24, №4. – С. 497-503.*

57*. **Сухарев А.Г.** Глобальный экстремум и методы его отыскания: Математические методы в исследовании операций/А.Г. Сухарев.– М.: Изд-во Московск. ун-та, 1983. – 193 с.

58. **Тарасов В.Н.** Влияние граничных условий на устойчивость прямоугольных пластин при жесткиих ограничениях на перемещения/ В.Н. Тарасов, И.Н. Логинов// *Вестн. Сыкт. ун-та. Сер.1. Мат. Мех. Инф. – 1995. – Вып.5. – С. 215-226.*

59. **Холмогоров Д.В.** Закритическое поведение подкрепленной пластины/ Д.В. Холмогоров// *Вестн. Сыкт. ун-та. Сер.1. Мат. Мех. Инф. – 2003. – Вып. 5. – С. 145-158.*

60. **Михайловский, Е.И.** Итерационные методы решения операторных уравнений: уч. пособие для вузов/ Е.И. Михйловский, В.Л. Никитенков А.А. Холопов – Сыктывкар: Изд-во Сыкт. ун-та, 2009.– – 322с.

61*. **Завьялов В.С.** Методы сплайн-функций/В.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко. – М.: Наука, 1890. – 352 с.

62. **Михайловский Е.И.** Алгоритм локального перебора вариантов в одной существенно нелинейной спектральной задаче/ Е.И. Михайловский Е.В. Тулубенская// *РАН. ПММ. – 2010. – Т. 14, вып. 2.– –С. 299-310.*

63. **Тулубенская Е.В.** Устойчивость круглой пластины на границе двух винклеровских сред/ Е.В. Тулубенская, Д.В. Логинов//*Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела: тр.научн. школы акад. В.В. Новожилова. – СПб: СПбГУ, 2004. –С. 162-166.*

64. **Михайловский Е.И.** Алгоритм локального перебора вариантов в задаче об устойчивости круглой пластины на границе винклеровских сред/ Е.И. Михайловский, Е.В. Тулубенская// *Механика и процессы управления: Тр.XXXVI Уральского семинара, посвященного 150-летию К.Э. Циолковского, 100-летию С.П. Королева и 60-летию Государственного ракетного центра "КБ им. академика В.П. Макеева". – Екатеренбург: УрО РАН,2007. – С. 109-116.*

65. **Тулубенская Е.В.** Устойчивость стержня переменной жесткости при односторонних ограничениях на перемещения/ Е.В. Тулубенская, Р.В. Каргин// *Вестн. Сыкт. ун-та. Сер.1. Мат. Мех. Инф. – – 2008. – Вып. 8. – С. 141-148.*

66. **Михайловский Е.И.** Учет поперечных сдвигов в задаче об устойчивости цилиндрической оболочки в условиях конструктивной нелинейности/ Е.И. Михайловский, Е.В. Тулубенская//*Вестн. Сыкт. ун-та. Сер.1. Мат. Мех. Инф. – 2009. – Вып. 9. – С. 64-77.*

67. **Михайловский Е.И.** К проблеме устойчивости в условиях конструктивной нелинейности/ Е.И. Михайловский// *Вестник СПбО АИН. – 2010. – №7. – С. 236-248.*

68. **Тулубенская Е.В.** Устойчивость оболочек и пластин конструктивно-нелинейной механики: дисс....канд. физ.-мат. наук: 01.02.04.: защищена 02.04.09: утв. 19.06.2009// Тулубенская Елена Владимировна. – СПб, 2009. – 89 с. – Библиогр.: с. 79-89.

Summary

Mikhailovskii E. I., Tarasov V.N. The constructive - nonlinear mechanics of plates and shells

Presents the second part of the article (the first part was published in the previous issue this "Messenger": 2010.–Vyp.11 – C.5-51) devoted to the stability and supercritical behavior of stractures and structures in unilateral restractions on the movement. The article, as stated in the preface, is a review. However, as set out in this part of the method of motion in the parameter stiffness of the elastic medium is published for the first time.

Сыктывкарский университет *Поступила 23.09.2010*