

УДК 539.3

К РЕШЕНИЮ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ С
ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРИИ ПЛАСТИН ТИПА
КАРМАНА-ТИМОШЕНКО-НАГДИ¹

А.В. Ермоленко

С использованием уравнений типа Кармана-Тимошенко-Нагди получено решение двух обратных задач – для цилиндрически изгибаемой пластины и для оссесимметрично деформируемой круглой пластины.

Введение

В работе [1] построена теория типа Кармана-Тимошенко-Нагди, уточняющая известную теорию Кармана [2] за счет учета поперечных сдвигов по линейной теории и учета вариаций параметров поперечного обжатия. Полевые уравнения теории типа Кармана-Тимошенко-Нагди можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} D\Delta^2 w &= q_n - h_*^2 \Delta q_n + (I - h_\psi^2 \Delta) \Lambda(\Phi, w), \\ \frac{1}{Eh} \Delta^2 \Phi &= \frac{\nu}{Eh} m_n - \frac{1}{2} \Lambda(w, w), \\ \psi_{1,1} + \psi_{2,2} &= -\frac{2(1+\nu)}{Eh} (q_n + \Lambda(\Phi, w)). \end{aligned} \quad (0.1)$$

Здесь w – прогиб (перемещение по нормали к срединной поверхности пластины), Φ – функция напряжения, ψ_i – поперечные сдвиги; E , ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала пластины, h – толщина пластины, $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$, $h_\psi^2 = h^2/6(1-\nu)$, $h_\lambda^2 = \nu h^2/8(1-\nu)$, $h_*^2 = h_\psi^2 - h_\lambda^2$; I – тождественный оператор, Δ – оператор Лапласа;

$$\Lambda(\Phi, w) = \Phi_{,11} w_{,22} - 2\Phi_{,12} w_{,12} + \Phi_{,22} w_{,11}; \quad w_{,1} \triangleq \frac{\partial w}{\partial x_1}; \quad (0.2)_1$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 годы, ГК № 02.740.11.0618

$$q_n = q_n^+ - q_n^-; \quad m_n = \frac{h}{2}(q_n^+ + q_n^-), \quad (0.2)_2$$

q_n – нормальная нагрузка на срединную поверхность; m_n – нагрузочный (или фиктивный) момент нормальной поверхностной нагрузки; q_n^+ , q_n^- – нагрузки, действующие на лицевые поверхности пластины.

Одной из особенностей системы (0.1) является наличие подчеркнутого слагаемого. Следует отметить, что нагрузочный момент m_n входит не только в систему (0.1), но и в формулы для вычисления параметров напряженно-деформированного состояния [1].

С использованием системы (0.1) решен ряд задач по определению напряженно-деформированного состояния пластины (см., например, [3]). В данной статье показана роль нагрузочного момента и при решении обратных задач [4] для пластин. В обратных задачах известны конфигурации до и после деформации, и необходимо определить нагрузку, под действием которой достигается соответствующая конфигурация. Следует отметить, что при использовании системы (0.1) можно получить не только нормальную нагрузку на срединную поверхность, но и нагрузки q_n^+ , q_n^- , действующие на лицевые поверхности пластины.

1. Обратная задача для цилиндрической панели

Пусть под действием некоторой нагрузки q_n^+ , q_n^- срединная поверхность плоской незакрепленной на краях пластины толщиной h переходит в часть круговой цилиндрической оболочки (рис. 1). Что касается протяженности вдоль оси x_1 , то её будем считать либо бесконечной, либо конечной, но нагруженной на концах $x_1 = \text{const}$ так, чтобы в пластине реализовывался чисто цилиндрический изгиб без растяжения.

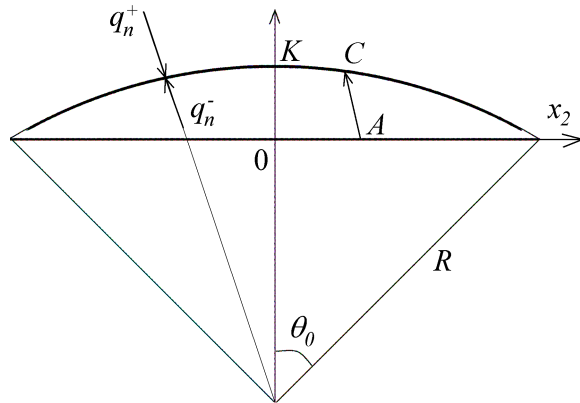


Рис. 1

Для решения поставленной задачи вместо уравнения (0.1)₂ удобнее воспользоваться следующими соотношениями²:

$$e_{11} \triangleq u_{1,1} = \frac{1}{Eh}(\Phi_{,22} - \nu\Phi_{,11} - \nu m_n) - \frac{1}{2}w_{,1}^2, \quad e_{22} = (1 \rightleftharpoons 2)e_{11},$$

²При подстановке этих соотношений в тождество $e_{11,22} + e_{22,11} - 2e_{12,12} = 0$ получается уравнение (0.1)₂.

$$e_{12} \triangleq \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) = -\frac{1+\nu}{Eh}\Phi_{,12} - \frac{1}{2}w_{,1}w_{,2}, \quad (1.1)$$

где u_i – перемещения точек срединной поверхности в направлении x_i .

Учитывая одномерность задачи, введем обозначения

$$x \equiv x_2, \quad u \equiv u_2, \quad w' \equiv \frac{\partial w}{\partial x_2}.$$

Для того чтобы воспользоваться уравнениями (0.1)₁ и (1.1), необходимо определить прогиб w и тангенциальное перемещение u . Рассмотрим произвольную точку $A(x, 0)$ исходной конфигурации. В результате деформации она переходит в некоторую точку C актуальной конфигурации.

Учитывая, что уравнение пластины после деформации имеет вид

$$z(x) = \sqrt{R^2 - x^2} - R \cos \theta_0, \quad (1.2)$$

длина дуги \widehat{KC} вычисляется по формуле (см. рис. 1)

$$\widehat{KC} = \int_0^{x_C} \sqrt{1 + z'^2} dx = R \arcsin \frac{x_C}{R}.$$

Отсюда, учитывая выражение (1.2), получаем, что вектор \mathbf{AC} можно представить следующим образом:

$$\mathbf{AC} = \left(R \sin \frac{x}{R} - x\right) \mathbf{e}_x + R(\cos \frac{x}{R} - \cos \theta_0) \mathbf{e}_y,$$

где \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y – орты декартовой системы координат. Окончательно получаем

$$w = R(\cos \frac{x}{R} - \cos \theta_0), \quad u = R \sin \frac{x}{R} - x. \quad (1.3)$$

Учитывая выражения (1.3), уравнения (0.1)₁ и (1.1) принимают вид

$$\begin{aligned} Dw^{IV} &= q_n - h_*^2 q_n'', \\ \Phi'' - \nu m_n &= 0, \\ u' &= \frac{1}{Eh}(-\nu \Phi'' - \nu m_n) - \frac{1}{2}w'^2. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Подставляя выражение для w^{IV} из (1.3)₁ в (1.4)₁, получаем дифференциальное уравнение

$$q_n'' - \frac{1}{h_*^2} q_n = -\frac{D}{h_*^2 R^3} \cos \frac{x}{R},$$

общее решение которого имеет следующий вид:

$$q_n = C_1 \operatorname{ch} \frac{x}{h_*} + C_2 \operatorname{sh} \frac{x}{h_*} + \frac{D}{R(R^2 + h_*^2)} \cos \frac{x}{R}. \quad (1.5)$$

Учитывая симметрию конструкции, следует положить $C_2 = 0$. Постоянную интегрирования C_1 определим из условия, что в состоянии равновесия полная нагрузка на верхнюю лицевую поверхность изогнутой пластины должна быть равна полной нагрузке на нижнюю лицевую поверхность, т.е.

$$\int_0^{R \sin \theta_0} q_n^+(x) \cos \theta dx = \int_0^{R \sin \theta_0} q_n^-(x) \cos \theta dx,$$

где θ – угол наклона нормали к срединной поверхности пластины после деформации. Учитывая, что $\cos \theta = x/R$, получаем

$$\int_0^{R \sin \theta_0} x q_n(x) dx = 0. \quad (1.6)$$

Используя условие (1.6), константу C_1 находим по формуле

$$C_1 = - \frac{DR(\cos(\sin \theta_0) + \sin \theta_0 \sin(\sin \theta_0))}{(Rh_* \sin \theta_0 \operatorname{sh} \left(\frac{R \sin \theta_0}{h_*} \right) - h_*^2 \operatorname{ch} \left(\frac{R \sin \theta_0}{h_*} \right))(R^2 + h_*^2)}.$$

Исключая из уравнений (1.4)₂, (1.4)₃ функцию напряжения Φ , получаем следующее выражение для нагрузочного момента m_n :

$$m_n = - \frac{Eh}{\nu(1 + \nu)} \left(u' + \frac{1}{2} w'^2 \right). \quad (1.7)$$

Используя найденные q_n и m_n , вычисляем нагрузки на лицевых поверхностях пластины следующим образом (см. (0.2)₂):

$$q_n^+ = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{h} m_n + q_n \right), \quad q_n^- = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{h} m_n - q_n \right).$$

На рис. 2 показаны результаты расчета для цилиндрической пластины со следующими физическими и геометрическими параметрами:

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2, \quad \nu = 0,3, \quad R = 100 \text{ см}, \quad \theta_0 = 0,1, \quad h = 2 \text{ см}. \quad (1.8)$$

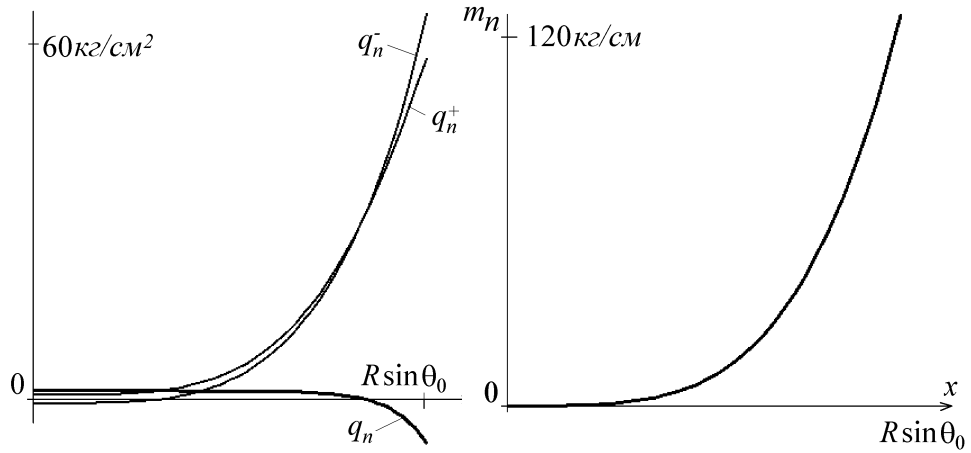


Рис. 2

3. Обратная задача для сферического сегмента

Рассмотрим теперь круглую пластину радиусом $R \sin \theta_0$ и толщиной h , срединная поверхность которой под действием нормальной осесимметричной нагрузки q_n^+ , q_n^- , переходит в часть сферы. Для решения поставленной задачи удобно перейти к полярным координатам (ρ, φ) . Считая, что $x_2 \equiv \rho$, центральный разрез исходной и актуальной конфигурации показан на рис. 1.

Уравнения (1.1) в полярных координатах с учетом осесимметричности задачи принимают вид [2]

$$\begin{aligned} u_{\rho,\rho} &= \frac{1}{Eh} \left[\frac{1}{\rho} \Phi_{,\rho} - \nu \Phi_{,\rho\rho} - \nu m_n \right] - \frac{1}{2} w_{,\rho}^2, \\ 0 = u_{\varphi,\varphi} &= \frac{1}{Eh} \left[\rho \Phi_{,\rho\rho} - \nu \Phi_{,\rho} - \rho \nu m_n \right] - u_{\rho}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где (см. (1.3))

$$w = R \left(\cos \frac{\rho}{R} - \cos \theta_0 \right), \quad u_{\rho} = R \sin \rho R - \rho. \quad (2.1')$$

Исключая из системы (2.1) нагрузочный момент m_n , получаем следующее уравнение для определения функции напряжения:

$$\Phi_{,\rho\rho} - \frac{1}{\rho} \Phi_{,\rho} = g(\rho), \quad (2.2)$$

где

$$g(\rho) = \frac{Eh}{1 + \nu} \left(\frac{u_{\rho}}{\rho} - \frac{1}{2} w_{,\rho}^2 - u_{\rho,\rho} \right). \quad (2.2')$$

Используя известные формулы

$$\sin \rho = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \rho^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos \rho = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \rho^{2k}}{(2k)!},$$

функцию $g(\rho)$ можно записать в следующем виде (см. также (2.1')):

$$g(\rho) = \frac{E}{1+\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left[-\frac{2k}{2k+1} + 2^{2k-2} \right] \left(\frac{\rho}{R} \right)^{2k}. \quad (2.3)$$

Рассматривая $\Phi_{,\rho}$ как неизвестную функцию, а также учитывая условие симметричности $\Phi_{,\rho}(0) = 0$, решение уравнения (2.2) с правой частью в виде (2.3) можно записать так:

$$\Phi_{,\rho} = \frac{ERh}{2(1+\nu)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(2k)!} \left[-\frac{2k}{2k+1} + 2^{2k-2} \right] \left(\frac{\rho}{R} \right)^{2k}. \quad (2.4)$$

С учетом найденной функции $\Phi_{,\rho}$ нагрузочный момент вычисляется по формуле (см. (2.1)₂)

$$m_n = \frac{1}{\nu\rho} (\rho\Phi_{,\rho\rho} - \nu\Phi_{,\rho} - Ehu_\rho). \quad (2.5)$$

Для определения нормальной нагрузки q_n необходимо учесть, что оператор Лапласа и билинейная форма Кармана $\Lambda(\Phi, w)$ (см. уравнение (0.1)₁) в полярных координатах с учетом осесимметричности задачи имеют вид

$$\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right), \quad \Lambda(\Phi, w) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{d\Phi}{d\rho} \frac{dw}{d\rho} \right). \quad (2.6)$$

Запишем уравнение (0.1)₁ в следующем виде:

$$\Delta q_n - \frac{q_n}{h_*^2} = f(\rho), \quad (2.7)$$

где

$$f(\rho) = \frac{1}{h_*^2} [(I - h_\psi^2 \Delta) \Lambda(\Phi, w) - D \Delta^2 w]. \quad (2.7')$$

С учетом соотношений (2.1') и (2.4), а также правил произведения рядов разложение функции $f(\rho)$ в ряд Маклорена имеет вид

$$f(\rho) = \frac{1}{h_*^2} \left[-\frac{E}{(1+\nu)R} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (k+1) \left(\sum_{i=1}^k \frac{c_i}{i(2i)!(2k-2i+1)} \right) \left(\frac{\rho}{R} \right)^{2k} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{Eh_\psi^2}{(1+\nu)R^3} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+2)^2 (k+2) \left(\sum_{i=1}^{k+1} \frac{c_i}{i(2i)!(2k-2i+3)!} \right) \left(\frac{\rho}{R} \right)^{2k} - \\
 & - \frac{4D}{R^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k^2+3k+2)}{(2k+1)!(2k+3)} \left(\frac{\rho}{r} \right)^{2k}] \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} f_k \left(\frac{\rho}{R} \right)^{2k}, \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

где

$$c_i = \left[-\frac{2i}{2i+1} + 2^{2i-2} \right].$$

Решение уравнения (2.7) с учетом условия симметрии $q'_n(0) = 0$ записывается в виде

$$q_n = \sum_{k=0}^{\infty} q_k \left(\frac{\rho}{R} \right)^{2k}, \quad (2.9)$$

где коэффициенты q_k находятся итерационно (см. (2.8))

$$q_{k+1} = \frac{1}{4(k+1)^2} \left(f_k + \frac{q_k}{h_*^2} \right). \quad (2.9')$$

Условие (1.6) в случае полярных координат записывается так:

$$\int_0^{R \sin \theta_0} q_n(\rho) \rho^2 d\rho = 0. \quad (2.10)$$

Используя выражения (2.9) и (2.10) условие для определения q_0 можно переписать в следующем виде:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{q_k}{k+1} (\sin \theta_0)^{2k+2} = 0.$$

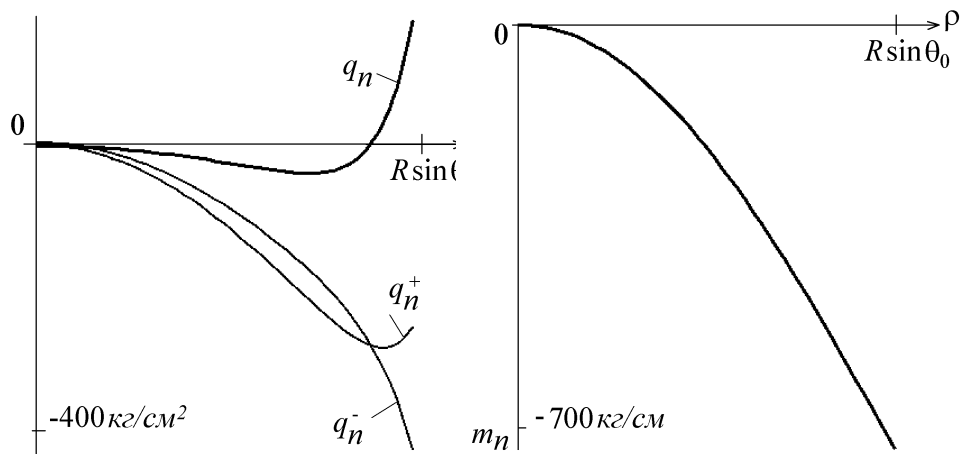


Рис. 3

На рис. 3 показаны результаты расчета для круглой пластины с параметрами (1.8).

Литература

1. **Михайловский Е.И.** Полудеформационный вариант граничных условий в нелинейной теории пологих оболочек / Е.И.Михайловский, А.В.Ермоленко // *Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела: Тр. научн. школы акад. В.В.Новожилова.* - СПб.: СПбГУ, 2000. - Вып. 3. - С. 60–76.
2. **Михайловский Е.И.** Математические модели теории упругости / Е.И.Михайловский, А.В.Торопов. - Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского ун-та, 1995. - 251 с.
3. **Ермоленко А.В.** О контактном взаимодействии цилиндрически изгибаемой пластины с абсолютно жестким основанием / А.В.Ермоленко // *Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела: Тр. научн. школы акад. В.В.Новожилова.* - СПб.: СПбГУ, 2000. - Вып. 2. - С. 79–95.
4. **Ватульян А.О.** Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела / А.О.Ватульян - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. - 224 с.

Summary

Yermolenko A.V. On the solution of inverse problems using the Kármán-Timoshenko-Naghdi type theory

The aim of this paper is to prove the role of the Karman-Timoshenko-Naghdi type theory on the solution of inverse problems. Inverse problems are considered for cylindrical plates and round axis-symmetric plates.

Сыктывкарский университет

Поступила 18.08.2010