Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.12.2010

УДК 518: 517.948

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ МЕТОДА АДДИТИВНОГО РАСЩЕПЛЕНИЯ (МАР)

В.Л. Никитенков, А.А. Холопов

Решается уравнение $x = b - Ax$ в банаховом пространстве с непрерывным линейным оператором так называемым методом аддитивного расщепления, когда оператор делится на несколько частей и применяется соответствующая итерационная процедура. Оптимальные параметры расщепления максимально расширяют по вещественной оси спектральную область сходимости.

An equation $x = b - Ax$ in a Banach space with continuous linear operator A is solving by so cold additive-split method when operator is split to some parts and an appropriate iteration procedure is used. The optimal parameters of splitting are those to extend mostly the spectral region of convergence for a self-conjugate operator. Рассмотрим операторное уравнение $x = b - Ax$ в банаховом пространстве X с непрерывным линейным оператором $A : X \to X$. В прикладных задачах вычисление "обратных значений"$A^{-1}y$ часто является трудно выполнимой операцией и решение ищется по методу простых итераций: $x_{p+1} = b - Ax_p$. Однако сходимость к решению с любого начального вектора возможна, если только спектр A находится в единичном открытом круге: $|\lambda| < 1,\ \lambda \in \sigma(A)$, то есть когда спектральный радиус $\rho(A) < 1$. Если последнее условие не выполнено, то необходимо использовать модификации метода простых итераций. В работах [1, 2] для расчета пластин и тонкостенных оболочек успешно применялись так называемые МЗР (метод замораживания реакций) и МАР (метод аддитивного расщепления оператора) в случае интегральных операторов A со спектральным радиусом $\rho(A) \gg 1$. Оба метода по существу эквивалентны и сводятся друг к другу. МАР, который имеет более простую итерационную схему, в своей обобщенной форме предполагает искать приближения к решению по схеме

$$x_{p+n} = b - \alpha_1 A\, x_p - \alpha_2 A\, x_{p+1} - \ldots - \alpha_n A\, x_{p+n-1}, \quad p = 0, 1, \ldots, \qquad (1)$$

где n - натуральное число,$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ - произвольный набор начальных векторов из X, параметры $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ удовлетворяют соотношениям

$$\alpha_1 + \ldots \ + \alpha_n = 1, \quad \alpha_1 \geqslant 0, \ldots \ \alpha_n \geqslant 0. \tag{2}$$

Сходимость (1) эквивалентна сходимости в пространстве X^n метода простых итераций

$$z_{p+1} = \tilde{b} - Cz_p, \quad p = 0, 1, \ldots, \tag{3}$$

где $z_m = (x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n-1})$, C - соответствующая операторная матрица $n \times n$. Переход к схеме (1) существенно расширяет спектральную область сходимости A. Например, при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \frac{1}{n}$ итерации (1) сходятся к решению, если спектр самосопряженного оператора A находится в интервале $(-1,\ n)$.

В работе [3] сформулирована следующая задача об оптимальных параметрах МАР:

Каковы должны быть параметры (2), чтобы область (спектральная для A) сходимости (1) содержала интервал $(-1,\ M)$ *максимальной величины* M*?*

Там же показано, что оптимальность параметров (2) следует понимать условно, как недостижимую, так как для самосопряженных операторов A со спектром, лежащим в интервале $(-1,\ \ M^*)$, где $\sup\limits_{(\alpha_j)} M(\alpha_1, \ldots \alpha_n) = M(\alpha_1^*, \ldots \alpha_n^*) = M^*$, сходимости (1) может не быть, но есть субоптимальность: "небольшое"ε - изменение параметров дает сходимость (1) для самосопряженных операторов A со спектром, лежащим в интервале $(-1,\ M^* - \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$,

Пусть $T_p(t),\ U_p(t)$ - полиномы Чебышева первого и второго рода, задаваемые равенствами

$$T_p(t) = \cos(p\omega), \ \ \sin(p+1)\omega = \sin\omega \cdot U_p(t), \ \ t \equiv \cos\omega$$

и пусть $Q(\alpha, t) = \alpha_1 \cdot U_{n-1}(t) + \ldots + \alpha_n \cdot U_0(t)$ - полином $(n-1)$ степени.

В [3] показано, что оптимальные $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*)$ являются решением следующей нелинейной задачи оптимизации:

$$\begin{gathered} f = \frac{1}{M} = (-1)^{n-1}\alpha_1 + \ldots - \alpha_{n-1} + \alpha_n \to \min \\ Q(\alpha,\, t) \geqslant 0 \quad , t \in [-1, 1]\,, \\ Q \ = 2^n \alpha_1 (t - t_1)^2 (t - t_2)^2 \ldots (t - t_k)^2\,, \qquad\quad n = 2k + 1 \\ Q \ = 2^n \alpha_1 (t - t_1)^2 (t - t_2)^2 \ldots (t - t_k)^2 (t + 1)\,, \quad n = 2k + 2 \\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1\,. \end{gathered} \tag{4}$$

Здесь $t_1, \dots, t_k$ - различные (кратности 2) корни полинома $Q(\alpha, t)$, $t_j = \cos \omega_j, \quad 0 < \omega_j < \pi$ (при четном $n = 2k+2$ полином $Q(\alpha, t)$ имеет дополнительный простой корень $t_{n+1} = -1$). В той же работе [3] задача (4) была решена аналитически при $n = 2, 3, 4$ и численно при многих, в том числе больших, значениях n.

В настоящей работе выводится (ниже теорема 1) формула для корней $t_1, \dots, t_k$ для всех значений n. Кроме того, доказывается (теорема 2) пропорциональность параметров α_j^*, с равноотстоящими от середины индексами, которая была указана еще в [3]. Наконец, получена (теорема 3) явная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для нахождения $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*)$.

Доказательство всех трех теорем использует следующее, недоказанное пока в общем виде, утверждение о свойствах корней полиномов Чебышева первого и второго рода.

Лемма (гипотеза). *Пусть числа t_j задаются формулой*

$$t_j = \cos \omega_j = \cos \left(\frac{(2j+1)\pi}{n+1} \right), \, j = 1, \dots, k. \tag{5}$$

Здесь и далее везде $k = \left[\dfrac{n-1}{2} \right]$. Тогда справедливы утверждения

*1) При нечетном $n = 2k+1$ **невырожденными** являются матрицы*

$$A_1 = \begin{pmatrix} T_k(t_1) & T_k(t_2) & \cdots & T_k(t_k) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ T_2(t_1) & T_2(t_2) & \cdots & T_2(t_k) \\ T_1(t_1) & T_1(t_2) & \cdots & T_1(t_k) \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} T_k(t_1) & T_k(t_2) & \cdots & T_k(t_k) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ T_2(t_1) & T_2(t_2) & \cdots & T_2(t_k) \\ 2T_1(t_1) - 1 & 2T_1(t_2) - 1 & \cdots & 2T_1(t_k) - 1 \end{pmatrix}.$$

Алгебраические дополнения ко всем элементам последней строчки A_1 и A_2 (эти дополнения для двух матриц одинаковы) не равны нулю и имеют один и тот же знак (отрицательный).

*2) При четном $n = 2k+2$ **невырожденными** являются матрицы*

$$A_3 = \begin{pmatrix} T_{k+1}(t_1) & \cdots & T_{k+1}(t_k) & (-1)^{k+1} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ T_2(t_1) & \cdots & T_2(t_k) & 1 \\ T_1(t_1) & \cdots & T_1(t_k) & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} T_k(t_1) & \cdots & T_k(t_k) & (-1)^{k+1} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ T_2(t_1) & \cdots & T_2(t_k) & 1 \\ 2T_1(t_1)-1 & \cdots & 2T_1(t_k)-1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Алгебраические дополнения ко всем элементам последней строчки A_3 и A_4 (эти дополнения для двух матриц одинаковыи) не равны нулю и имеют один и тот же знак.

3) При всех n невырожденной является матрица

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ U_0(t_1) & U_1(t_1) & \cdots & U_k(t_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_0(t_k) & U_1(t_k) & \cdots & U_k(t_k) \end{pmatrix}.$$

Алгебраические дополнения ко всем элементам первой строчки A_5 не равны нулю и имеют один и тот же знак.

Справедливость этих утверждений непосредственно проверяется при малых значениях k и для значений k специального вида. Однако лемма общем случае не доказана и является *гипотезой*.

Теорема 1.

a) При нечетном $n = 2k+1$ искомые корни удовлетворяют равенству

$$U_{k+1}(t_j) = U_{k-1}(t_j), \tag{6}$$

являясь k младшими корнями полинома $U_{k+1}(t) - U_{k-1}(t)$ степени $k+1$. Старший корень его $t_0 = \cos\left(\dfrac{\pi}{2k+2}\right)$ не входит в число t_j.

b) При четном $n = 2k+2$ искомые корни удовлетворяют равенству

$$U_{k+1}(t_j) = U_k(t_j), \tag{7}$$

являясь k младшими корнями полинома $U_{k+1}(t) - U_k(t)$ степени $k+1$. Старший корень его $t_0 = \cos\left(\dfrac{\pi}{2k+3}\right)$ не входит в число t_j.

c) Для всех n корни t_j даются формулой (5):

$$t_j = \cos\omega_j = \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{n+1}\right), \; j = 1, \ldots, k.$$

d) Корни t_j также удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} &U_n(t_j) = 0, \\ &U_{n-1}(t_j) = U_0(t_j) = 1\ , \\ &U_{n-2}(t_j) = U_1(t_j)\ , \\ &\quad\cdots\ . \end{aligned} \tag{8}$$

Доказательство. Формулы (5) и (8) являются непосредственным следствием из (6), (7). Действительно, из (6) и определения полиномов Чебышева $U_p(t)$ получаем при нечетном n равенства

$$\frac{\sin\left((k+2)\,\omega_j\right)}{\sin\,\omega_j} = \frac{\sin\left(k\,\omega_j\right)}{\sin\,\omega_j}, \quad t_j = \cos\omega_j .$$

Отсюда, пользуясь формулами для синусов суммы и разности углов, получаем

$$\cos(n+1)\omega_j = 0 \qquad \text{или} \quad \omega_j = \frac{(2j+1)\pi}{n+1}.$$

В диапазоне $[0,\pi]$ находятся значения ω_j при $j = 0, 1, \ldots, k$. Значение $t_0 = \cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)$ не может являться корнем полинома $Q(\alpha^*, t)$, так как

$$\sin\frac{\pi}{n+1}\cdot Q(\alpha^*, t_0) = \alpha_1^*\cdot\sin\frac{n\pi}{n+1} + \ldots + \alpha_n^*\cdot\sin\frac{\pi}{n+1} > 0$$

(все синусы строго положительны, все α_i^* неотрицательны и в сумме равны 1).

При *четном* n соотношение (7) дает ту же формулу (5). Действительно, из (7) и определения полиномов Чебышева $U_p(t)$ получаем равенства

$$\frac{\sin\left((k+2)\,\omega_j\right)}{\sin\,\omega_j} = \frac{\sin\left((k+1)\,\omega_j\right)}{\sin\,\omega_j},$$

или $\cos(k+3/2)\omega_j = 0$, или $\omega_j = \dfrac{(2j+1)\pi}{2k+3} = \dfrac{(2j+1)\pi}{n+1}$. Выбор индексов j аналогичен.

Формулы (8) являются следствием (5) и рекуррентных соотношений для полиномов Чебышева

$$\begin{aligned} T_{p+1}(t) &= 2t\,\cdot T_p(t) - T_{p-1}(t) \\ U_{p+1}(t) &= 2t\,\cdot U_p(t) - U_{p-1}(t)\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Например, при нечетном *нечетном* n при $p = k+1$ из (9) следует

$$U_{k+2}(t_j) = 2t_j\,U_{k+1}(t_j) - U_k(t_j)$$

$$U_k(t_j) = 2t_j\, U_{k-1}(t_j) - U_{k-2}(t_j).$$

Вычитая, получаем $U_{k+2}(t_j) - U_{k-2}(t_j) = 2t_j \cdot (U_{k+1}(t_j) - U_{k-1}(t_j)) = 0$. Аналогично, при $p = k \pm 2$ получаем $U_{k+3}(t_j) - U_{k-3}(t_j) = 2t_j \cdot (U_{k+2}(t_j) - U_{k-2}(t_j)) = 0$ и так далее. Наконец,

$$U_{2k}(t_j) - U_0(t_j) = 2t_j \cdot (U_{2k-1}(t_j) - U_1(t_j)) = 0,$$

$$U_{2k+1}(t_j) - U_{-1}(t_j) = U_n(t_j) = 2t_j \cdot (U_{2k}(t_j) - U_0(t_j)) = 0.$$

Здесь принято $U_{-1}(t) = \dfrac{\sin(0 \cdot \omega)}{\sin \omega} = 0$.

При *четном* n соотношения (8) выводятся аналогично.

Докажем теперь (6), (7). Задача (4) является задачей оптимизации с неизвестными $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; $t_1, t_2, \ldots, t_k$. Рассмотрим ее как задачу относительно лишь $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Заметим, что условия неотрицательности $\alpha_1 \geqslant 0, \ldots, \alpha_n \geqslant 0$ здесь опущены, так как принципиального значения для МАР они не имеют. Требуется лишь убедиться в неотрицательности оптимальных параметров $\alpha_1^* \geqslant 0, \ldots, \alpha_n^* \geqslant 0$ после получения оптимального решения.

При фиксированных значениях корней $t_1, \ldots, t_k$ задача (4) похожа на задачу линейного программирования (ЗЛП) относительно неизвестных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и только лишь несчетное число ограничений вида $Q(\alpha,\, t) \geqslant 0,\ \ t \in [-1, 1]$ не позволяет (4) считать ЗЛП. Заменим эту несчетную совокупность ограничений на *конечную совокупность*

$$Q(\alpha,\, x_i) \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, N$$

при произвольных значениях $x_i \in [-1, 1]$, среди множества которых *обязательно*должны быть корни $t_1, \ldots, t_k$, а также число $t_{k+1} = -1$. Произвольность множества $X = \{x_1, \ldots, x_N\}$ делает (4) с несчетным количеством условий эквивалентной совокупности ЗЛП (зависящих формально от множества X)) вида

$$\begin{aligned}
&f = (-1)^{n-1}\alpha_1 + \ldots - \alpha_{n-1} + \alpha_n \to \min \\
&\alpha_1 \cdot U_{n-1}(x_1) + \ldots + \alpha_n \cdot U_0(x_1) \geqslant 0 \\
&\alpha_1 \cdot U_{n-1}(x_2) + \ldots + \alpha_n \cdot U_0(x_2) \geqslant 0 \\
&\qquad\qquad\qquad \cdots \\
&\alpha_1 \cdot U_{n-1}(x_N) + \ldots + \alpha_n \cdot U_0(x_N) \geqslant 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Все эти ЗЛП должны иметь общее решение $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*)$, в котором $Q(\alpha^*,\, x) = 0$, если $x = t_j$ и $Q(\alpha^*,\, x) > 0$, если $x \neq t_j$.

Задача (10) как ЗЛП на min и не имеющая среди условий-неравенств вида $\leqslant$, имеет двойственную ЗЛП с переменными $z_1, \ldots, z_N$, y, причем z_1 соответствует первому неравенству в (10), z_2 соответствует второму неравенству и так далее, y соответствует последнему условию-равенству. В свою очередь, переменная α_1 соответствует первому условию двойственной ЗЛП, α_2- второму условию и так далее.

Двойственная ЗЛП имеет вид

$$\begin{array}{l} y \to \max \\ U_{n-1}(x_1)z_1 + \ldots + U_{n-1}(x_N)z_N + y = (-1)^{n-1} \\ U_{n-2}(x_1)z_1 + \ldots + U_{n-2}(x_N)z_N + y = (-1)^{n-2} \\ \qquad\qquad \cdots \\ U_0(x_1)\,z_1 \;+\; \ldots \;+ U_0(x_N)\,z_N \;+\; y \;=\; 1 \\ z_1 \geqslant 0, \;\; z_2 \geqslant 0, \;\; \ldots, \;\; z_N \geqslant 0\,. \end{array} \tag{11}$$

Согласно теории двойственных ЗЛП, оптимальные решения задач (10) и (11) существуют или не существуют одновременно и справедливы утверждения

$$f^* = y^* \text{ (совпадение целевых функций)}$$

$$z_i^* \cdot Q(\alpha^*, x_i) = 0 \text{ (условия дополняющей нежесткости)} \tag{12}$$

(второй комплект условий дополняющей нежесткости, очевидно, всегда выполняется).

Так как для x_i, отличных от корней $t_1, \ldots, t_k$, выполнено строгое неравенство $Q(\alpha^*,\, x_i) > 0$, то из (12) сразу же следует, что соответствующие $z_i^* = 0$. Поэтому в системе ограничений (11) для оптимального решения можно оставить лишь те z_i^*,, которые соответствуют корням $t_1, \ldots, t_k$ для нечетного n и $t_1, \ldots, t_k$, $t_{k+1} = -1$ для четного n. Обозначим соответствующие значения z_i^* через $b_1, \ldots, b_k$, а также b_{k+1} для четного n.

Получается система относительно неизвестных $b_1, \ldots, b_{k+1}$, y^* :

$$\begin{array}{c} \sum\limits_j U_{n-1}(t_j)b_j + y^* = (-1)^{n-1} \\ \sum\limits_j U_{n-2}(t_j)b_j + y^* = (-1)^{n-2} \\ \cdots \\ \sum\limits_j U_0(t_j)b_j + y^* = \;1\;, \end{array} \tag{13}$$

где суммирование идет по всем корням $t_j,\ j = 1, \ldots, k, k+1$.

Система (13) имеет уравнений n уравнений и $\left[\dfrac{n+2}{2}\right]$ неизвестных, поэтому она *переопределена* при $k \geqslant 1$. При $k = 0$ система имеет единственное решение $y^* = 1$ для $n = 1$ и единственное же решение $b_1 = \dfrac{2}{3}$, $y^* = \dfrac{1}{3}$ для $n = 2$. Именно переопределенность системы (13) дает возможность найти корни $t_1, \ldots, t_k$.

Дальнейшие преобразования (13) различаются для четных и нечетных n, поэтому рассмотрим их отдельно.

Случай нечетного n.

Пусть $n = 2k+1$. Пронумеруем уравнения (13) сверху вниз, указывая номер в угловых скобках.

$$\begin{array}{ll}
U_{2k}(t_1)\,b_1 + \ldots + U_{2k}(t_k)b_k + y^* = 1 & <1> \\
U_{2k-1}(t_1)b_1 + \ldots + U_{2k-1}(t_k)b_k + y^* = -1 & <2> \\
\vdots \qquad\qquad \vdots & \\
U_1(t_1)\,b_1 + \ldots + U_1(t_k)\,b_k + y^* = -1 & <2k> \\
U_0(t_1)b_1 + \ldots + U_0(t_k)\,b_k + y^* = 1\,. & <2k+1>
\end{array}$$

Вычтем уравнение $<3>$ из $<1>$, $<4>$ из $<2>$,$\cdots$,$<2k+1>$ из $<2k-1>$. Тем самым, в полученных уравнениях не будет y^*, а правые части будут равны 0. Кроме того, вычтем $<2k+1>$ из $<2k>$. Так как $U_0(t_j) = 1$, то уравнение имеет вид

$$y^* = 1 - b_1 - \ldots - b_k,$$

то есть позволяет находить $f^* = y^*$ через $b_1, \ldots, b_k$, и в дальнейшем не будет участвовать в системе.

Получаем следующую СЛАУ относительно $b_1, \ldots, b_k$.

$$\begin{array}{ll}
\sum\limits_j [U_{2k}(t_j) - U_{2k-2}(t_j)] \cdot b_j = 0 & <1> \\
\qquad\ldots & \\
\sum\limits_j [\,U_2(t_j) - U_0(t_j)] \cdot b_j = 0 & <2k-1> \\
\sum\limits_j [U_1(t_j) - U_0(t_j)] \cdot b_j = -2\,. & <2k>
\end{array} \qquad (14)$$

Среди однородных уравнений $<1>, \cdots, <2k-1>$ средним по счету является уравнение с номером $<k>$, которое можно записать как

$$\sum_j v_j = 0, \tag{15}$$

где обозначено

$$v_j = [U_{k+1}(t_j) - U_{k-1}(t_j)] \cdot b_j\,. \tag{16}$$

Используя рекуррентное соотношение (9), получаем для каждого j

$$U_{k+2}(t_j) - U_k(t_j) = 2t_j[U_{k+1}(t_j) - U_{k-1}(t_j)] - [U_k(t_j) - U_{k-2}(t_j)].$$

Умножив эти равенства на b_j и сложив, получим из $<k-1>, <k+1>$ равенство

$$\sum_j t_j v_j = 0. \tag{17}$$

Далее, $U_{k+1}(t_j) - U_{k-1}(t_j) = 2t_j[U_k(t_j) - U_{k-2}(t_j)] - [U_{k-1}(t_j) - U_{k-3}(t_j)]\,.$ После умножения этих равенств на b_j и сложения по j получаем, с учетом уравнений $<k>, <k+2>$, вспомогательное равенство

$$\sum_j t_j \cdot [U_k(t_j) - U_{k-2}(t_j)] \cdot b_j = 0. \tag{18}$$

Рассмотрим уравнение $<k-2>$. Имеем, снова из (9),

$$\begin{aligned} U_{k+3}(t_j) - U_{k+1}(t_j) \; &= 2t_j \cdot [U_{k+2}(t_j) - U_k(t_j)] - [U_{k+1}(t_j) - U_{k-1}(t_j)] \; = \\ &= 4t_j^2 \cdot [U_{k+1}(t_j) - U_{k-1}(t_j)] - 2t_j \cdot [U_k(t_j) - U_{k-2}(t_j)] - [U_{k+1}(t_j) - U_{k-1}(t_j)]. \end{aligned}$$

Умножим последние равенства на b_j и сложим. С учетом уравнений $<k-2>, <k>$ и вспомогательного уравнения (18) получим равенство

$$\sum_j t_j^2 \cdot v_j = 0. \tag{19}$$

Аналогично получаются равенства

$$\sum_j t_j^3 \cdot v_j = 0, \; \ldots, \; \sum_j t_j^{k-1} \cdot v_j = 0. \tag{20}$$

Равенства (15), (17), (19), (20) показывают, что получена квадратная однородная система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $v_1, \dots, v_k$. Определитель матрицы этой системы является определителем Вандермонда

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_k \\ \dots & \dots & & \dots \\ t_1^{k-1} & t_2^{k-1} & \dots & t_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (t_j - t_i).$$

Так как все корни $t_1, \dots, t_k$ различны (иначе кратность некоторых корней полинома $Q(\alpha^*,\ t)$ была бы больше двух), то этот определитель не равен нулю, и однородная система (15), (17), (19), (20) имеет лишь нулевое решение

$$v_1 = v_2 = \ldots = v_k = 0. \tag{21}$$

Определение (16) и равенство $v_j = 0$ приводит к двум случаям:

$$\text{или} \quad b_j = 0 \quad \text{или} \quad U_{k+1}(t_j) - U_{k-1}(t_j) = 0.$$

Заметим, что $b_j \neq 0$ хотя бы для некоторых j, иначе неоднородная система (14) не имела бы решения. Можно было бы непосредственно доказывать, что допущение $b_j = 0$ хотя бы для одного j приводит к выводу о равенстве $b_j = 0$ для всех j, то есть к противоречию (это следует из невырожденности матрицы квадратной СЛАУ, составленной из $k-1$ уравнения с номерами $< k+1 >, \dots, < 2k-1 >$ системы (14)). Однако проще воспользоваться следующей теоремой для двойственных ЗЛП: *Если для допустимых решений двойственных ЗЛП выполнены условия дополняющей нежесткости, то эти допустимые решения являются оптимальными решениями.* Покажем, что все условия этой теоремы выполнены, если в качестве t_j взять корни из условия (6) теоремы, то есть k младших корней полинома $U_{k+1}(t) - U_{k-1}(t)$.

Допустимость $b_1, \dots, b_k, y^*$. Значения b_j находятся из квадратной СЛАУ, составленной из последних k уравнений системы (14). При этом первые уравнения с номерами $< 1 >, \dots, < k-1 >$ будут копиями уравнений с номерами $< k+1 >, \dots, < 2k-1 >$. Условия неотрицательности $b_1 \geqslant 0,\ \ b_2 \geqslant 0,\ \ \dots,\ \ b_k \geqslant 0$, также входят в число условий (11) и их необходимо проверить. Так как для всех $j = 1, \dots, k$ и всех $m = 2, \dots, k$ выполнены равенства

$$U_m(t_j) - U_{m-2}(t_j) = \frac{\sin(m+1)\omega_j - \sin(m-1)\omega_j}{\sin \omega_j} = 2\cos m\omega_j\,,$$

то указанная квадратная неоднородная система имеет расширенную матрицу

$$A = \left\langle \begin{array}{cccc|c} \cos k\omega_1 & \cos k\omega_2 & \cdots & \cos k\omega_k & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ \cos 2\omega_1 & \cos 2\omega_2 & \cdots & \cos 2\omega_k & 0 \\ 2\cos\omega_1 - 1 & 2\cos\omega_2 - 1 & \cdots & 2\cos\omega_k - 1 & -2 \end{array} \right\rangle . \tag{22}$$

Согласно лемме матрица A_2 является невырожденной, поэтому система (22) дает однозначное решение. Кроме того, матрица A_2 имеет алгебраические дополнения к последней строке одинакового знака. Из формулы Крамера для решения СЛАУ получаем, что и $b_1, \ldots, b_k$, пропорциональные алгебраическим дополнениям к последней строке (22), также имеют одинаковый знак. На самом деле все $b_j > 0$. Косвенно это видно из равенства $y^* = 1 - b_1 - \ldots - b_k$, так как при отрицательных $b_j < 0$ значение $M^* = \dfrac{1}{f^*} = \dfrac{1}{y^*} < 1$, тогда как должно быть $M^* > 1$ при $n > 1$. Число y^* находится из последнего уравнения (13). Таким образом, найденные $b_1, \ldots, b_k, y^*$ действительно являются допустимыми решениями (13), а с учетом $z_i^* = 0$ для остальных индексов, соответствующих $Q(\alpha, x_i) > 0$, допустимыми решениями (11).

Допустимость $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*)$. Значения α_j^* также однозначно находятся из системы равенств $Q(\alpha^*, t_j) = 0$ (см. ниже теорему 3). Хотя требования $\alpha_j \geqslant 0$ формально не входят в число условий ЗЛП (10), но мы воспользовались ими при отбрасывании старшего корня $t_0 = \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ и их необходимо проверить. Положительность $\alpha_j^* > 0$ также следует из теоремы 3.

Выполнение условий дополняющей нежесткости. Очевидно, условия выполняются, так как $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*)$ и $b_1, \ldots, b_k, y^*$ находятся из системы равенств.

Итак, корни (6) обеспечивают оптимальность $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*)$. Теорема в нечетном случае доказана.

Случай четного n.

Пусть $n = 2k + 2$. В системе (13) выделим слагаемое с индексом $j = k + 1$. Так как $t_{k+1} = -1$, то из (9) получаем

$$U_0(-1) = 1;$$

$$U_1(-1) = 2(-1) - 0 = -2;$$

$$U_2(-1) = 2(-1)(-2) - 1 = 3;$$

$$\ldots$$

$$U_{2k+1}(-1) = (-1)(2k+2).$$

Система (13) после вычитаний, аналогичных случаю для нечетного n, примет вид

$$\begin{aligned}
&\sum_j [U_{2k+1}(t_j) - U_{2k-1}(t_j)] \cdot b_j - 2b_{k+1} = 0 && <1>\triangle\\
&\sum_j [U_{2k}(t_j) - U_{2k-2}(t_j)] \cdot b_j + 2b_{k+1} = 0 && <2>\\
&\qquad\ldots\\
&\sum_j [U_2(t_j) - U_0(t_j)] \cdot b_j + 2b_{k+1} = 0 && <2k>\\
&\sum_j [U_1(t_j) - U_0(t_j)] \cdot b_j - 3b_{k+1} = -2\,. && <2k+1>
\end{aligned} \tag{23}$$

Сложим уравнения $<2>$ и $<1>$, $<3>$ и $<2>$ и так далее, и рассмотрим полученную однородную систему уравнений $<1>, \cdots, <2k-1>$

$$\begin{aligned}
&\sum_j [U_{2k+1}(t_j) + U_{2k}(t_j) - U_{2k-1}(t_j) - U_{2k-2}(t_j)] \cdot b_j = 0 && <1>\\
&\qquad\ldots\\
&\sum_j [U_{k+2}(t_j) + U_{k+1}(t_j) - U_k(t_j) - U_{k-1}(t_j)] \cdot b_j = 0 && <k>\\
&\qquad\ldots\\
&\sum_j [U_3(t_j) + U_2(t_j) - U_1(t_j) - U_0(t_j)] \cdot b_j = 0. && <2k-1>
\end{aligned} \tag{24}$$

Выражения в квадратных скобках (24) можно упростить. Для уравнения со средним по счету номером $<k>$ можно записать, пользуясь (9), два равенства

$$U_{k+2}(t_j) = 2t_j\,U_{k+1}(t_j) - U_k(t_j); \quad U_{k-1}(t_j) = 2t_j\,U_k(t_j) - U_{k+1}(t_j).$$

После вычитания получаем

$$U_{k+2}(t_j) - U_{k-1}(t_j) = (2t_j + 1) \cdot (U_{k+1}(t_j) - U_k(t_j))\,.$$

Тогда

$$[U_{k+2}(t_j) + U_{k+1}(t_j) - U_k(t_j) - U_{k-1}(t_j)] = (2t_j + 2) \cdot (U_{k+1}(t_j) - U_k(t_j)).$$

Аналогично, выражение в квадратной скобке уравнения $< k-1 >$ равно

$$[U_{k+3}(t_j) + U_{k+2}(t_j) - U_{k+1}(t_j) - U_k(t_j)] =$$
$$= (2t_j + 2) \cdot (U_{k+2}(t_j) - U_{k+1}(t_j)) = (2t_j + 2)^2 \cdot (U_{k+1}(t_j) - U_k(t_j)).$$

Упростив таким образом первые k уравнений (24) и обозначив через

$$v_j = [U_{k+1}(t_j) - U_k(t_j)] \cdot b_j,$$

получаем относительно неизвестных $v_1, \ldots, v_k$ однородную СЛАУ с определителем типа Вандермонда, равным

$$2^k \prod_{j=1}^{k} (1 + t_j) \cdot \prod_{i<j} (t_j - t_i).$$

Он не равен нулю, так как все корни различны и не равны -1. Тогда выполнено (21), то есть $v_1 = v_2 = \ldots = v_k = 0$. Снова можно считать, что для всех j выполнено равенство $U_{k+1}(t_j) - U_k(t_j) = 0$.

Величины $b_1, \ldots, b_{k+1}$ можно найти из последних $k+1$ уравнений (23). Матрица A_4 этой системы согласно лемме является невырожденной и имеет алгебраические дополнения к последней строке одинакового знака. Из формулы Крамера для решения СЛАУ получаем, что и $b_1, \ldots, b_{k+1}$ также имеют одинаковый знак, а именно, $b_1 > 0, \quad b_2 > 0, \quad \ldots, \quad b_k > 0$. Итак, показано, что формулы (6),(7) дают значения корней $t_1, \ldots, t_k$,, для которых задача оптимизации имеет решение. Теорема 1 доказана.

Установив значения корней $t_1, \ldots, t_k$, можно найти значения оптимальных параметров из системы равенств $Q(\alpha^*, t_j) = 0$. Но, прежде всего, докажем справедливость гипотезы о свойстве оптимальных параметров МАР, указанной в [3].

Теорема 2. *Оптимальные значения α_j^* удовлетворяют соотношениям*

$$\begin{array}{ll} \alpha_n^* = n \cdot \alpha_1^* & \\ 2 \cdot \alpha_{n-1}^* = (n-1) \cdot \alpha_2^* & \\ \quad \cdots & \\ k \cdot \alpha_{k+2}^* = (k+2) \cdot \alpha_k^* & n = 2k+1\,, \\ (k+1) \cdot \alpha_{k+2}^* = (k+2) \cdot \alpha_{k+1}^* & n = 2k+2\ . \end{array} \tag{25}$$

Доказательство. Все корни $t_1, \ldots, t_k$, являются кратными, поэтому для них выполнены два равенства: 1) $Q(\alpha^*, t_j) = 0$; 2) $\dfrac{dQ(\alpha^*, t_j)}{dt} = 0$. Дифференцируя по ω тождество

$$\sin(p+1)\omega = \sin\omega \cdot U_p(\cos\omega),$$

получаем при $t = \cos\omega \neq \pm 1$ формулу для производных

$$U_p'(t) = \frac{t \cdot U_p(t) - (p+1) \cdot T_{p+1}(t)}{1 - t^2}.$$

Умножим эти равенства, взятые в точках t_j при $p = 0, \ldots, \ n-1$, на значения α^*_{n-p} и сложим их. Тогда из определения полинома $Q(\alpha^*, t)$ получаем

$$\frac{dQ(\alpha^*, t_j)}{dt} = \frac{t_j \cdot Q(\alpha^*, t_j) - \sum_{p=0}^{n-1} (p+1) \cdot \alpha^*_{n-p} \cdot T_{p+1}(t_j)}{1 - t_j^2}.$$

Равенства $Q(\alpha^*, t_j) = 0$, $\dfrac{dQ(\alpha^*, t_j)}{dt} = 0$ дают СЛАУ

$$\begin{array}{ll}
n \cdot \cos n\omega_1 \cdot \alpha_1^* + \ldots + 2\cos 2\omega_1 \cdot \alpha^*_{n-1} + \cos\omega_1 \cdot \alpha_n^* = 0 & <1> \\
n \cdot \cos n\omega_2 \cdot \alpha_1^* + \ldots + 2\cos 2\omega_2 \cdot \alpha^*_{n-1} + \cos\omega_2 \cdot \alpha_n^* = 0 & <2> \\
\quad \ldots & \\
n \cdot \cos n\omega_k \cdot \alpha_1^* + \ldots + 2\cos 2\omega_k \cdot \alpha^*_{n-1} + \cos\omega_k \cdot \alpha_n^* = 0\,. & <k>
\end{array} \qquad (26)$$

Случай нечетного $n = 2k+1$.

В этом случае $\cos(k+1)\omega_j = \cos\left[(k+1) \cdot \dfrac{2j+1}{2k+2}\pi\right] = \cos(j\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$ и слагаемые с α^*_{k+1} в (26) равны нулю.

Система (26) обладает симметрией по столбцам, а именно, столбцы матрицы (26), симметричные относительно среднего (нулевого, как показано выше) столбца, являются противоположными с точностью до коэффициентов $n, n-1, \ldots, 2$. Действительно,

$$\begin{aligned}
&\cos n\omega_j = -\cos[(2j+1)\pi - n\omega_j] = \\
&\qquad = -\cos\left[\frac{(2j+1)(n+1) - n(2j+1)}{n+1}\right]\pi = -\cos\omega_j \\
&\cos(n-1)\omega_j = -\cos[(2j+1)\pi - (n-1)\omega_j] = \\
&\qquad = -\cos\left[\frac{(2j+1)(n+1) - (n-1)(2j+1)}{n+1}\right]\pi = -\cos 2\omega_j
\end{aligned} \qquad (27)$$

и так далее. Обозначим

$$\begin{aligned} q_1 &= -n \cdot \alpha_1^* + \alpha_n^*; \\ q_2 &= -(n-1) \cdot \alpha_2^* + 2\alpha_{n-1}^*; \\ &\dots \\ q_k &= -(k+1) \cdot \alpha_k^* + k\alpha_{k+2}^* \,. \end{aligned} \tag{28}$$

Из-за отмеченной симметрии (27) систему (26) можно рассматривать как однородную СЛАУ относительно неизвестных $q_1, \dots, q_k$ из (28)

$$\begin{array}{llll} \cos\omega_1 \cdot q_1 + & \cos 2\omega_1 \cdot q_2 + & \cdots & + \cos k\omega_1 \cdot q_k = 0 \\ \cos\omega_2 \cdot q_1 + & \cos 2\omega_2 \cdot q_2 + & \cdots & + \cos k\omega_2 \cdot q_k = 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos\omega_k \cdot q_1 + & \cos 2\omega_k \cdot q_2 + & \cdots & + \cos k\omega_k \cdot q_k = 0 \,. \end{array}$$

Матрица этой системы

$$A = \begin{pmatrix} \cos\omega_1 & \cos 2\omega_1 & \cdots & \cos k\omega_1 \\ \cos\omega_2 & \cos 2\omega_2 & & \cos k\omega_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos\omega_k & \cos 2\omega_k & \cdots & \cos k\omega_k \end{pmatrix}$$

при

$$\omega_j = \frac{(2j+1)\pi}{2k+2},\ j = 1, \dots, k$$

совпадает с матрицей A_1 из леммы после транспонирования и последующей перестановки строк (1 строка меняется с последней и так далее). Очевидно, указанные преобразования не меняют невырожденность матрицы, поэтому согласно лемме данная однородная СЛАУ имеет лишь нулевое решение $q_1 = \ldots = q_k = 0$, откуда следует справедливость (25).

Случай четного $n = 2k+2$.

Симметрия (27) по столбцам матрицы системы (26) также выполняется. Теперь нет среднего столбца. Введем обозначения, аналогичные (28):

$$\begin{aligned} q_1 &= -(2k+2) \cdot \alpha_1^* + \alpha_{2k+2}^*; \\ q_2 &= -(2k+1) \cdot \alpha_2^* + 2\alpha_{2k+1}^*; \\ &\dots \\ q_{k+1} &= -(k+2) \cdot \alpha_{k+1}^* + (k+1) \cdot \alpha_{k+2}^* \,. \end{aligned} \tag{29}$$

Вместо квадратной системы имеем однородную систему из k уравнений и $k+1$ неизвестного (29). Недостающее уравнение можно добавить из равенства $Q(\alpha^*, -1) = 0$, так как $t_{k+1} = -1$ в четном случае также является корнем.

Ранее уже приводились значения полиномов Чебышева в точке -1:

$$U_0(-1) = 1; \;\; U_1(-1) = -2; \; U_2(-1) = 3; \ldots, U_{2k+1}(-1) = (-1)(2k+2).$$

Тогда $Q(\alpha^*, -1) = 0$ дает равенство

$$-(2k+2) \cdot \alpha_1^* + (2k+1) \cdot \alpha_2^* + \ldots - 2 \cdot \alpha_{2k+1}^* + \alpha_{2k+2}^* = 0,$$

или, в обозначениях (29), недостающее уравнение

$$q_1 - q_2 + \ldots + (-1)^k q_{k+1} = 0.$$

В итоге для $q_1, \ldots, q_{k+1}$ получаем однородную СЛАУ

$$\begin{array}{ccccc} \cos\omega_1 \cdot q_1 + & \cos 2\omega_1 \cdot q_2 + & \cdots & + \cos(k+1)\omega_1 \cdot q_{k+1} & = 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \cos\omega_k \cdot q_1 + & \cos 2\omega_k \cdot q_2 + & \cdots & + \cos(k+1)\omega_k \cdot q_{k+1} & = 0 \\ q_1 - & q_2 + & \cdots & + (-1)^{k+1} q_{k+1} & = \;\; 0\,. \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \cos\omega_1 \cdot q_1 + & \cos 2\omega_1 \cdot q_2 + & \cdots & + \cos(k+1)\omega_1 \cdot q_{k+1} & = 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \cos\omega_k \cdot q_1 + & \cos 2\omega_k \cdot q_2 + & \cdots & + \cos(k+1)\omega_k \cdot q_{k+1} & = 0 \\ q_1 - & q_2 + & \cdots & + (-1)^{k+1} q_{k+1} & = \;\; 0\,. \end{array}$$

Матрица этой системы после транспонирования, последующей перестановки строк (1 строка меняется с последней, вторая с предпоследней и так далее) и последующего умножения последнего столбца на -1, совпадает с матрицей A_3 из леммы и, следовательно, является невырожденной. Очевидно, указанные преобразования не меняют невырожденность матрицы, поэтому согласно лемме данная СЛАУ имеет лишь нулевое решение $q_1 = q_2 = \ldots = q_{k+1} = 0$, и (25) справедлива и в четном случае. Теорема 2 доказана.

Рассмотрим теперь систему для нахождения оптимальных параметров $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*)$.

Теорема 3. *Пусть*

$$\delta = \begin{cases} 1, & n = 2k+1, \\ 2, & n = 2k+2\,. \end{cases}$$

Тогда

1) $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_{k+1}^*$ *находятся из неоднородной СЛАУ порядка* $k+1$:

$$\begin{cases} \alpha_1^* + \frac{1}{2}\alpha_2^* + \ldots + \frac{1}{k}\cdot\alpha_k^* + \delta\frac{1}{2(k+1)}\cdot\alpha_{k+1}^* = \frac{1}{n+1} \\ \sin\omega_1\cdot\alpha_1^* + \frac{1}{2}\sin 2\omega_1\cdot\alpha_2^* + \ldots + \frac{1}{k}\sin k\omega_1\cdot\alpha_k^* + \delta\frac{\sin(k+1)\omega_1}{2(k+1)}\cdot\alpha_{k+1}^* = 0 \\ \ldots \\ \sin\omega_k\cdot\alpha_1^* + \frac{1}{2}\sin 2\omega_k\cdot\alpha_2^* + \ldots + \frac{1}{k}\sin k\omega_k\cdot\alpha_k^* + \delta\frac{\sin(k+1)\omega_k}{2(k+1)}\cdot\alpha_{k+1}^* = 0\,. \end{cases} \tag{30}$$

Остальные α_i^* *находятся из соотношений (25).*

2) Система имеет единственное решение: $\alpha_i^* > 0 \ \forall i$.

Доказательство. Для нечетного n условие $\alpha_1^* + \alpha_2^* + \ldots + \alpha_n^* = 1$ можно записать с учетом (25) в виде

$$\alpha_1^* + n\alpha_1^* + \alpha_2^* + \frac{n-1}{2}\alpha_2^* + \ldots + \alpha_k^* + \frac{n+1-k}{k}\alpha_k^* + \alpha_{k+1}^* = 1,$$

а после разделения на $n+1 = 2k+2$, в виде

$$\alpha_1^* + \frac{1}{2}\alpha_2^* + \ldots + \frac{1}{k}\alpha_k^* + \frac{1}{n+1}\alpha_{k+1}^* = \frac{1}{n+1},$$

что совпадает с первым условием (30) при $\delta = 1$. Аналогично получаем первое условие (30) при $\delta = 2$.

Для доказательства справедливости остальных условий (30) заметим, что

$$\sin n\omega_j = \sin[(2j+1)\pi - n\omega_j] = \sin\frac{(2j+1)}{n+1}\pi = \sin\omega_j;\ \sin(n-1)\omega_j = \sin 2\omega_j,$$

и так далее. Тогда условие $Q(\alpha^*, t_j) = 0$ при нечетном $n = 2k+1$ запишется (после умножения на $\sin\omega_j \neq 0$) как

$$\sin\omega_j\cdot(\alpha_n^* + \alpha_1^*) + \ldots + \sin k\omega_j\cdot(\alpha_{k+2}^* + \alpha_k^*) + \sin(k+1)\omega_j\cdot\alpha_{k+1}^* = 0.$$

Разделив это равенство на $n+1 = 2k+2$ и, используя соотношения (25), получаем однородные условия (30). Совершенно аналогично они получаются при четном $n = 2k+2$.

Для доказательства второго пункта теоремы заметим, что матрица системы (30) невырождена по лемме. Действительно, если разделить второе уравнение (30) на $\sin\omega_1 \neq 0$, третье - на $\sin\omega_2 \neq 0$, и так далее, то вместо $\sin p\omega_j$ можно писать $U_{p-1}(t_j)$. Далее, второй столбец умножим на 2, третий - на 3 и так далее, последний - на $\frac{2k+2}{\delta}$, и получим матрицу A_5. Решения α_i^* СЛАУ по формуле Крамера пропорциональны алгебраическим дополнениям по первой строке. В лемме формулируется одинаковость знаков ненулевых алгебраических дополнений матрицы A_5 по первой строке, что вместе с условием нормировки (2) дает положительность параметров α_i^*. Теорема 3 доказана.

Литература

1. **Михайловский Е. И., Никитенков В.Л.** К расчету и рациональному проектированию опор для тяжелых цилиндрических оболочек // *Прикладные проблемы прочности и пластичности. Алгоритмизация и автоматизация решения задач упругости и пластичности. Горький: Изд-во ГГУ, 1985. С. 120 - 125.*

2. **Михайловский Е. И., Никитенков В.Л., Тарасов В.Н.** Определение реакций упругоподатливых опор одностороннего действия под сосудами давления // *Строительная механика и расчет сооружений. М., 1986. № 3. С. 54-57.*

3. **Никитенков В. Л.А., Холопов А. А.** Оптимальные области сходимости линейных многослойных итерационных процедур// *Вопросы функционального анализа (теория меры, упорядоченные пространства, операторные уравнения) : Межвуз. сб. науч. тр. /Сыктывкар: Сыкт. ун-т. 1991. С. 134 - 142.*

Summary

Nikitenkov V.L., Kholopov A.A. The optimal parameters of an additive-split method (ASM)

An equation $x = b - Ax$ in a Banach space with continuous linear operator A is solving by so cold additive-split method when operator is split to some parts and an appropriate iteration procedure is used. The optimal parameters of splitting are those to extend mostly the spectral region of convergence for a self-conjugate operator.

Сыктывкарский университет *Поступила 20.05.2009*