Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.12.2010

УДК 539.376

СТРУКТУРИРОВАНИЕ В НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ЭКСТРУЗИИ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА[1]

Н. А. Беляева, Е. А. Прянишникова

Представлена структурная неизотермическая математическая модель экструзии композитного материала с использованием обобщенной модели Ньютона. Новизна предложенной модели состоит в совместном рассмотрении реодинамики, кинетики структурирования и температурного факторов.

1. Постановка задачи

Рассмотрим процесс выдавливания предварительно нагретого композитного сжимаемого материала из цилиндрической камеры в направляющий калибр той же формы, но меньшего радиуса (рис. 1). Ось симметрии заготовки примем за ось z, положительное направление которой противоположно движению поршня. Начало координат $z = 0$ свяжем с центром отверстия основания камеры. Вся область течения, таким образом, разделится на два отдельных участка: движение внутри камеры между перемещающимся поршнем $z = H(t)$ и выходным отверстием $z = 0_+$, и течение внутри калибра между $z = 0_-$ (входное отверстие в калибр) и свободной поверхностью $z = -L(t)$, t — время. Возмущениями в обеих областях при переходе из камеры в калибр пренебрегаем. Движение смеси в каждой из областей считаем одномерным с одной ненулевой компонентой скорости $V_z = V \neq 0$.

Введем массовые координаты (q, t), где t — реальное время, массовая координата q имеет смысл относительной массы материала, находящейся между переменным сечением z и свободной поверхностью $z = -L(t)$,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 годы, ГК № 02.740.11.0618

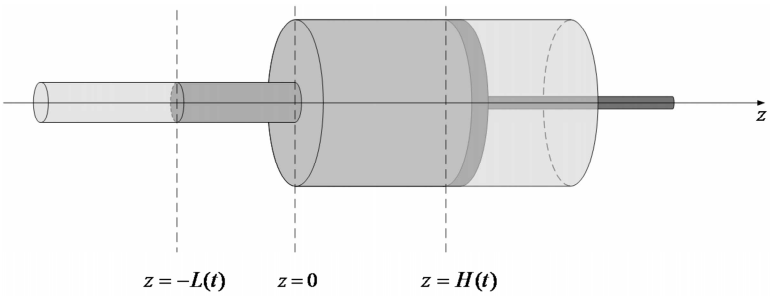


Рис. 1: Модель экструдера

таким образом,

$$q = \frac{M}{S_1\rho_1} = \int_0^z \rho(s,t)\,ds + \frac{S_2}{S_1}\int_{-L(t)}^0 \rho(s,t)\,ds,$$

где M — масса материала в указанном сечении, S_1, S_2 — площади сечений камеры и калибра, соответственно, ρ_1 — плотность несжимаемой основы материала, при этом плотность структуры определяется произведением $\rho\cdot\rho_1$, где $\rho = \rho(q,t)$ — относительная плотность среды. Для элементарных масс, движущихся в камере, выполняется условие $q^* \le q \le q_0$, а в калибре $0 \le q \le q^*$, где q^* — элементарная масса, находящаяся на отверстии в момент времени t, q_0 — массовая координата плунжера.

В рамках рассматриваемого одномерного подхода движение среды полностью определяется системой уравнений:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho^2\frac{\partial V}{\partial q} = 0; \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial T^1}{\partial t} + V\rho\frac{\partial T^1}{\partial q} = \frac{1}{c\rho_1}\frac{\partial}{\partial q}\Big(\rho\lambda(\rho)\frac{\partial T^1}{\partial q}\Big) - \frac{2\alpha}{c\rho_1\rho\ r_1}(T^1 - T_0); \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial T^2}{\partial t} + V\rho\frac{\partial T^2}{\partial q} = \frac{1}{c\rho_1}\rho\lambda(\rho)\frac{\partial^2 T^2}{\partial^2 q} - \frac{2\alpha}{c\rho_1\rho\ r_2}(T^2 - T_0); \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} + V\rho\frac{\partial a}{\partial q} = D\Big(\rho^2\frac{\partial^2 a}{\partial q^2} + \rho\frac{\partial a}{\partial q}\frac{\partial\rho}{\partial q}\Big) + k_2[1 - a - a\chi\exp(p\sigma_{qq})]; \tag{1.4}$$

$$\sigma_{qq} = \left(\frac{4}{3}\mu + \xi\right)\rho\frac{\partial V}{\partial q}; \tag{1.5}$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \left(-\frac{2}{3}\mu + \xi\right)\rho\frac{\partial V}{\partial q}; \tag{1.6}$$

начальные и граничные условия:

$$T^1(q,0) = T^*; \tag{1.7}$$

$$\rho\Big|_{t=0} = \rho_0(q),\ a\Big|_{t=0} = 0; \tag{1.8}$$

$$\rho\lambda(\rho)\frac{\partial T^1}{\partial q}\Big|_{q=q_0} = -h_1(T^1 - T_0)\Big|_{q=q_0}, \tag{1.9}$$
$$\rho\lambda(\rho)\frac{\partial T^2}{\partial q}\Big|_{q=0} = -h_2(T^2 - T_0)\Big|_{q=0};$$

$$T^1\Big|_{q=q^*} = T^2\Big|_{q=q^*},\quad -\rho\lambda(\rho)\frac{\partial T^2}{\partial q}\Big|_{q=q^*} = \frac{S_2}{S_1}\rho\lambda(\rho)\frac{\partial T^1}{\partial q}\Big|_{q=q^*}; \tag{1.10}$$

$$V(q^*_+,t) = -\frac{S_2}{S_1}\frac{k_1|\sigma_{qq}(t)|^m}{\rho_1\rho(q^*,t)},\ V(q^*_-,t) = -\frac{k_1|\sigma_{qq}(t)|^m}{\rho_1\rho(q^*,t)}; \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial a}{\partial q}\Big|_{q=q_0} = \frac{\partial a}{\partial q}\Big|_{q=q^*} = 0; \tag{1.12}$$

$$\sigma_{qq}\Big|_{q=q_0} = \sigma_0. \tag{1.13}$$

Здесь (1.1) —уравнение неразрывности, $V = V(q,t)$ — скорость течения материала; (1.1), (2.2) — уравнения теплопроводности в камере и калибре, соответственно, T^1 — температура в камере, T^2 — в калибре, c — теплоемкость материала, $\lambda = \lambda(\rho)$ — коэффициент теплопроводности вещества, α— коэффициент теплообмена через боковые стенки [5]; (2.3)— диффузионно-кинетическое уравнение относительно степени структурирования среды $a = a(q,t)$. Соотношения (3.4), (3.5) —

дифференциальные уравнения состояния вследствие обобщенной модели Ньютона. Здесь $\mu = \mu(a, \rho, T) = \mu_0 \exp\big(-\beta(T - T^*) - k(1-a)\big)\rho^l$ и $\xi = \xi(a, \rho, T) = 4/3\, \mu(a, \rho, T)(1-\rho)^{-1}$ — сдвиговая и объемная вязкости. В начальный момент времени задана температура материала (3), распределение плотности и степени структуризации (4.6). Теплообмен с окружающей средой через плунжер и свободную поверхность выдавленного в калибр стержня учитывается условиями (5.7). Соотношения (5.8) означают непрерывность температурного поля и равенство тепловых потоков в камере и калибре на отверстии. Граничные условия (1.11) — следствие закона гидравлического сопротивления отверстия — определяют скорость материала на отверстии в камере и калибре, соответственно. Левая часть соотношения (1.12) означает непроникновение вещества через плужер, а правая — отсутствие изменения структуры материала при переходе из камеры в калибр; (1.13) — условие заданного напряжения на плунжере.

2. Определение параметров течения

Система (1.1) —(1.13) допускает частично аналитическое решение, а именно, удается выписать формулы для плотности (2.14) и скорости (2.15) в камере в виде квадратур:

$$\rho(q,t) = \rho_0 \exp\left(-\int_0^t \frac{\sigma_{qq}(\tau)}{\frac{4}{3}\mu(q,\tau) + \xi(q,\tau)} \right), q^* \le q \le q_0; \tag{2.14}$$

$$V(q,t) = V(q^*,t) + \sigma_{qq}(t) \int_{q^*}^{q} \frac{ds}{\rho(s,t)\left(\frac{4}{3}\mu(s,t) + \xi(s,t)\right)}, \tag{2.15}$$
$$q^* \le q \le q_0.$$

Доуплотнения материала в калибре не происходит, поэтому в области $0 \le q \le q^*$, соответствующей калибру, плотность зависит лишь от массовой координаты q :

$$\rho(q) = \rho_0(q) \exp\left(-\int_0^{t^*} \frac{\sigma_{qq}(\tau)}{\frac{4}{3}\mu(q,\tau) + \xi(q,\tau)} \right).$$

Здесь t^* — момент прохождения указанной массы через отверстие.

Выдавленный в калибр стержень движется с переменной скоростью того элементарного объема, который в рассматриваемый момент времени находится на отверстии. Указанная скорость определяется из закона сопротивления отверстия (1.11) и имеет вид

$$V(q^*_-, t) = -\frac{k_1 |\sigma_{qq}(t)|^m}{\rho_1 \rho(q^*, t)}.$$

Длина выдавленного в калибр стержня находится по формуле

$$L(t) = \int_0^t V(q^*, \tau)\, d\tau,$$

где $V(q^*, \tau)$ — скорость элементарного объема, находящегося на отверстии в момент времени τ.

Степень структуризации и температура экструдируемого материала определяются численно с использованием метода прогонки. Для реализации указанного метода уравнения (1.1) — (2.3), начальные и граничные условия (3) — (5.8), (1.12) заменим разностными соотношениями [6]:

$$\frac{T^1_{ij} - T^1_{i,j-1}}{\Delta\, t_j} + \rho_{ij} V_{i,j} \frac{T^1_{ij} - T^1_{i-1,j}}{\Delta\, q} = \frac{1}{c\rho_1}\Big[\lambda_{ij}\frac{\rho_{ij} - \rho_{i-1,j}}{\Delta\, q}\frac{T^1_{ij} - T^1_{i-1,j}}{\Delta\, q} +$$

$$+\rho_{ij}\frac{\lambda_{ij} - \lambda_{i-1,j}}{\Delta\, q}\frac{T^1_{ij} - T^1_{i-1,j}}{\Delta\, q} + \rho_{ij}\lambda_{ij}\frac{T^1_{i+1,j} - 2T^1_{ij} + T^1_{i-1,j}}{(\Delta\, q)^2}\Big] - \frac{2\alpha}{c\rho_1 r_2 \rho}\left(T^1_{ij} - T_0\right),$$

$$i*+1 \le i \le n,\ j \ge 1;$$

$$\frac{T^2_{ij} - T^2_{i,j-1}}{\Delta t_j} + \rho_{ij} V_{i,j} \frac{T^2_{ij} - T^2_{i-1,j}}{\Delta\, q} = \frac{1}{c\rho_1}\rho_{ij}\lambda_{ij}\frac{T^2_{i+1,j} - 2T^2_{ij} + T^2_{i-1,j}}{(\Delta\, q)^2} -$$

$$-\frac{2\alpha}{c\rho_1 r_2 \rho}\left(T^2_{ij} - T_0\right), 1 \le i \le i*-1,\ j \ge 1;$$

$$T^1_{i*,j} = T^2_{i*,j}\ j \ge 1;$$

$$\rho_{nj}\lambda_{nj}\frac{T^1_{nj} - T^1_{n-1,j}}{\Delta\, q} = -h_1\left(T^1_{nj} - T_0\right), j \ge 1;$$

$$\rho_{0j}\lambda_{0j}\frac{T^2_{1j} - T^2_{0,j}}{\Delta\, q} = h_2\left(T^2_{0j} - T_0\right), j \ge 1;$$

$$\frac{T^2_{i*,j} - T^2_{i*-1,j}}{\Delta\, q} = -\frac{S_2}{S_1}\frac{T^2_{i*+1,j} - T^2_{i*,j}}{\Delta\, q}, j \ge 1;$$

$$\frac{a_{ij}-a_{i,j-1}}{\Delta\, t_j}+V_{ij}\rho_{ij}\frac{a_{ij}-a_{i-1,j}}{\Delta\, q}=D\Big(\rho_{ij}^2\frac{a_{i+1,j}-2a_{ij}+a_{i+1,j}}{(\Delta\, q)^2}+$$

$$+\rho_{ij}\frac{a_{ij}-a_{i-1,j}}{\Delta\, q}\frac{\rho_{ij}-\rho_{i-1,j}}{\Delta\, q}\Big)+k_2\left[1-a_{ij}-a_{ij}\exp(p\sigma_{qq})\right],$$

$$i*+1\le\ i\le\ n,\ j\ge\ 1;$$

$$a_{i0}=0, i*\le\ i\le\ n;$$

$$\frac{a_{nj}-a_{n-1,j}}{\Delta\, q}=0,\ \frac{a_{i*+1,j}-a_{i*,j}}{\Delta\, q}=0,\ j\ge\ 1.$$

3. Некоторые результаты численного эксперимента

Численное решение задачи, результаты которого представлены ниже в виде графиков, выполнено с использованием программы, разработанной в среде *Delphi* 7.0. Соответствующие значения параметров: $q_0=0.04\,$м, $r_1=0.2\,$м, $\rho_1=1500\,$кг/м^3; $\rho_0=0.5\,$кг/м^3, $\rho_m=0.7\,$кг/м^3 — начальные значения плотности на отверстии и плунжере, соответственно; $D=10^{-5}\,$м/с^2 — коэффициент диффузии, $p=0.02\,$Па$^{-1}$ — константа, характеризующая интенсивность процесса деформации связей, $\mu_0=10^9\,$Па $\cdot$ с —вязкость несжимаемой основы материала, $\chi=10^{-5}$ — отношение констант скоростей разрушения и восстановления структуры, $k_1=0.05\,$с$^{-1}$ — коэффициент пропорциональности закона сопротивления отверстия, $k_2=0.011\,$с$^{-1}$ — константа скорости восстановления структуры, $k_a=-3$ — коэффициент пропорциональности в экспоненциальной зависимости вязкости от степени структуризации, $m=1/3$ — степенная зависимость закона сопротивления отверстия, $\sigma_0=-5\cdot 10^7\,$Па, $\lambda_0=20\,$Вт/(К $\cdot$ м), $T_0=293\,$К — температура окружающей среды, $T^*=2000\,$К — начальная температура заготовки, $c=1000\,$Дж, $\alpha=-0.25\cdot10^{-2}\,$К$^{-1}$, $\beta=0,01\,$К$^{-1}$ — коэффициент пропорциональности в экспоненциальной зависимости сдвиговой вязкости от температуры, $h_1=12, h_2=80\,$К$^{-1}$ — константы, характеризующие теплообмен на плунжере и свободной поверхности выдавленного стержня. В начальный момент времени плотность материала распределена линейно

$$\rho_0(q)=\rho_0+(\rho_m-\rho_0)\,\frac{q}{q_0}.$$

Предполагается, что на плунжере задано возрастающее усилие

$$\sigma_{qq}=\sigma_0\left(2-\frac{1}{1+t}\right).$$

Оценивается влияние степени структурирования, температуры на динамику параметров процесса. Для этого рассматриваются следующие зависимости сдвиговой (и, следовательно, объемной) вязкости:

$$\mu = \mu_0 \exp\left(-k_a\left(1-a\right)\right)\,\rho^4, \tag{3.16}$$

$$\mu = \mu_0 \exp\left(-\beta\left(T-T^*\right)\right)\,\rho^4, \tag{3.17}$$

$$\mu = \mu_0 \exp\left(-\beta\left(T-T^*\right)-k_a\left(1-a\right)\right)\,\rho^4, \tag{3.18}$$

учитывающие прямое влияние степени структуризации среды (3.16), температуры (3.17) и их суммарное влияние (3.18). Приведенные гра-

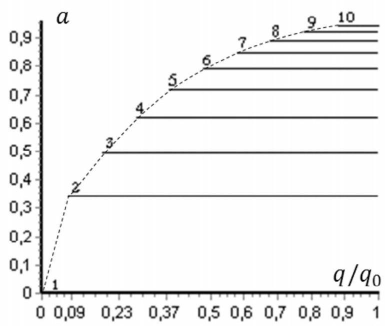
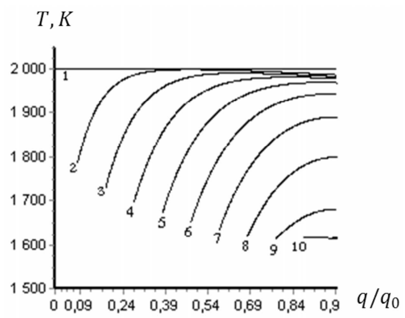


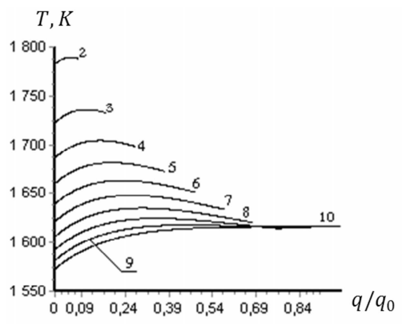
Рис. 2: Массово-временное распределение степени структуризации $a = a(q,t)$ в камере

фики массово-временного распределения параметров процесса соответствуют моментам времени $t(c)$: 1(0), 2(3,82), 3(6,26), 4(8,83), 5(11,52), 6(14,29), 7(17,15), 8(20,08), 9(25,99), 10(29,03).

В работе [4] аналитически показано, что в случае большой вязкости экструдируемой среды (в данном случае $\mu = 10^9$) распределение степени структурирования будет иметь в каждый момент времени однородный характер, что подтверждается численными экспериментами и в рассматриваемой работе (рис. 2). Пунктиром показано распределение степени структуризации в калибре. Наиболее структурированными оказываются элементарные массы, прилежащие к плунжеру. Массово-временное распределение температуры, представленное на рис. 3, показывает ее существенное изменение вследствие наличия теплообмена через боковые стенки, плунжер и свободную поверхность выдавленного

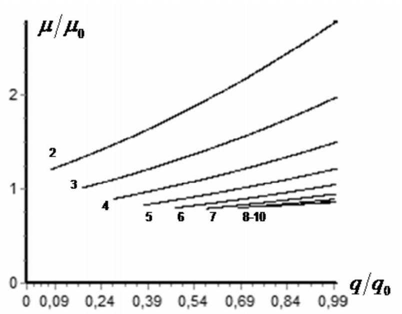


а)

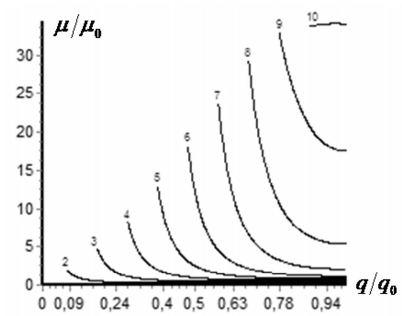


б)

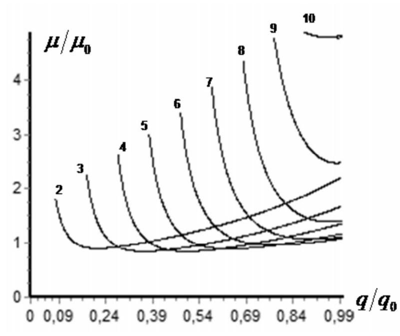
Рис. 3: Массово-временное распределение температуры $T = T(q, t)$: а) — в камере, б) — в калибре;



а)

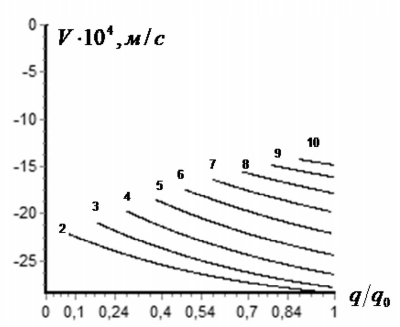


б)

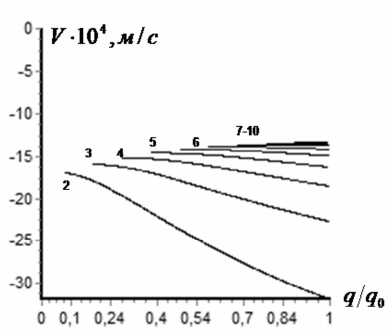


в)

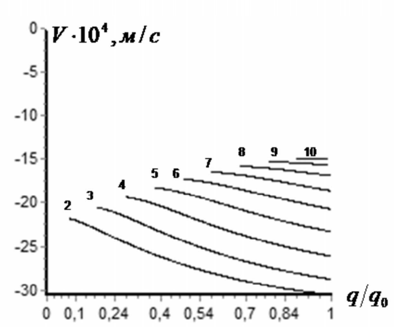
Рис. 4: Массово-временное распределение относительной сдиговой вязкости μ/μ_0 в камере; вычисление вязкости $\mu = \mu(q, t)$ по формулам (3.16), (3.17), (3.18)



а)



б)



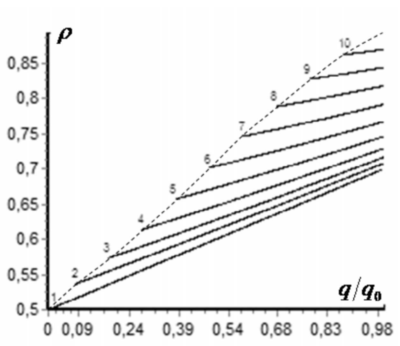
в)

Рис. 5: Массово-временное распределениескорости $V = V(q,t)$ в камере; вычисление по формулам (3.16), (3.17), (3.18)

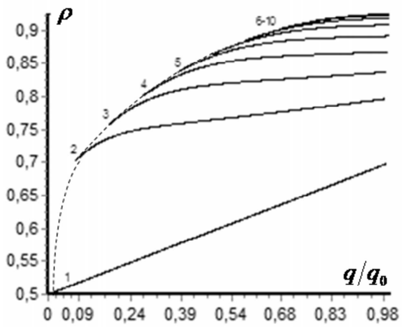
стержня. В соответствии с выбранными зависимостями (3.16) — (3.18) на рис. 4 представлено изменение вязкости, а на рис. 6 — плотности экструдируемой композиции. Однородное распределение степени структурирования среды объясняет характер изменения вязкости на рис. 4а — почти линейные подобные кривые, плотности (рис. 6а) — распределение подобно начальному линейному распределению. Значительные неоднородные изменения температурного поля приводят к существенно нелинейному распределению вязкости (рис. 4б) и, соответственно, плотности материала (рис. 6б).

Суммарное влияние структурного и температурного факторов (3.18) приводит к уменьшению вязкости (рис. 4) по сравнению со случаем (3.17) (рис. 4б), выравниванию кривых плотности, более медленному уплотнению экструдируемой композиции (рис. 6в).

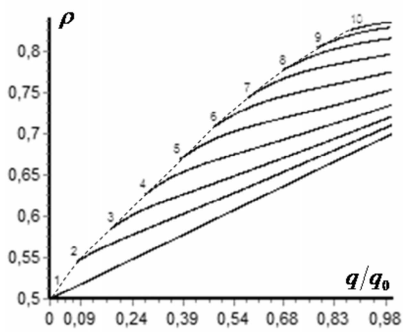
Характер изменения вязкости отражается и на поведении скорости



а)



б)



в)

Рис. 6: Массово-временное распределение плотности $\rho = \rho(q, t)$ в камере; вычисление по формулам (3.16), (3.17), (3.18)

текучей среды (рис. 5). Одновременный учет структурного и температурного факторов (рис. 5в) приводит к быстрому выравниванию скоростей большей части элементарных масс (за исключением масс вблизи отверстия) – наблюдается выход на режим выдавливания близкий к однородному. Кроме того, выдавливание в калибр основной части материала происходит со значительно большей по величие скоростью, по сравнению со скоростями, сооветствующими вязкости (3.16), (3.17) — рис. 5а,б.

Данная модель и результаты численного анализа были представлены на Всероссийской [8] и международной конференциях [9].

В заключение следует отметить, что в представленной модели, являющейся развитием структурного подхода к рассмотрению процессов деформирования материалов, оценивается влияние на свойства формируемых изделий не только температурного фактора, но и подтверждается необходимость учета изменения структуры деформируемой среды. Последнее очень важно для развития современной реологии: объектом деформирования является вязкий сжимаемый композитный материал.

Литература

1. **Беляева Н. А.** Математические модели деформируемых структурированных материалов. Монография. — Сыктывкар: Издательство СыктГУ, 2008. — 116 с.

2. **Беляева Н. А., Стельмах Л. С., Столин А. М.** Динамика твердофазной плунжерной экструзии вязкоупругого структурированного материала // *Теоретические основы химической технологии. — 2008. — № 5. — С. 579–589.*

3. **Беляева Н. А., Стельмах Л. С., Пугачев Д. В., Столин А. М** Неустойчивые режимы деформирования при твердофазной экструзии вязкоупругих структурированных систем // *ДАН. — 2008. — Т. 420, № 6. — С. 579–589.*

4. Беляева Н. А. Влияние характерных времен на режимы твердофазной экструзии // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер 1. Вып. 9. 2009. С. 46–53.*

5. **Стельмах Л. С., Жиляева Н. Н., Столин А. М.** Реодинамика и теплообмен горячего компактирования порошковых материалов // *ИФЖ. — 1992. — Т. 63, № 5. — С. 612–622.*

6. **Самарский А. А.** Теория разностных схем. — М: Наука, 1983. — 616 с.

7. **Беляева Н. А.** Деформирование вязкоупругих материалов с изменяющейся структурой // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер 1. Вып. 11. 2010. С. 52–75.*

8. **Беляева Н. А., Прянишникова Е. А.** Неизотермическая математическая модель экструзии вязкоупругого структурированного материала // *Труды седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи», 3-6 июня 2010 г., г. Самара: Самарский государственный технический университет. С. 281–283.*

9. **Беляева Н. А.** Неизотермическая модель экструзии структурированного композитного материала // *Труды международной научно-технической конференции «Нанотехнологии функциональных материалов (НФМ'10)», 22-24 сентября 2010 г., Санкт-Петербург: Издательствово Политехнического университета. С. 537–539.*

10. **Прянишникова Е. А., Беляева Н. А.** Структурная неизотермическая математическая модель экструзии сжимаемого композитного материала. Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам РФ, Реестр программ для ЭВМ. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2010614082, 19 октября 2010 г.

Summary

Belyaeva N. A., Pryanishnikova E. A. Granularity in a nonisothermal extrusion composite material

The structural mathematical model of non-isothermal extrusion of a composite material using a generalized model of Newton is presented. The novelty of the proposed model is the joint consideration of Reo-Dimamics, kinetics of structuring and temperature factor.

Сыктывкарский госуниверситет *Поступила 15.09.2010*