

УДК 539.371

**ПРОДОЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ
ОБОЛОЧКИ ПРИ ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ
ВИНКЛЕРОВЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ**

Е.И. Михайловский, Д.В. Холмогоров, В.В. Гинтнер

В работе рассматривается задача об устойчивости продольно сжимаемой цилиндрической оболочки в условиях внешних и внутренних односторонних ограничений винклера типа. Применяется локальный метод поиска собственных значений положительно однородного оператора. При численном исследовании задачи перемещения аппроксимируются сплайнами.

1. Постановка задачи

Пусть R – радиус оболочки, L – длина, h – толщина. Выберем координаты (x, y) , откладываемые соответственно вдоль образующей и по дуге. Введем центральный угол θ так, что $y = R\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ и безразмерную координату $\xi = x/R$. Тогда положение точки срединной поверхности оболочки определяется координатами (ξ, θ) . Перемещения точек вдоль оси x обозначим через u , перемещения по касательной к координатной линии y – через v , а перемещения по нормали к срединной поверхности обозначим через w (прогиб). Прогиб считается положительным, если он направлен к центру кривизны.

Выражения для деформаций в срединной поверхности и параметров изменения кривизны через перемещения возьмем в виде [1]:

$$\varepsilon_{\xi} = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \xi}; \quad \varepsilon_{\theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{R}; \quad \gamma = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \xi}; \quad (1.1)$$
$$\kappa_{\xi} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}, \quad \kappa_{\theta} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$$

$$\varkappa = -\frac{1}{2R^2} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \theta}. \quad (1.2)$$

Упругая энергия системы „цилиндрическая оболочка – винклеровы среды“ определяется формулами полной потенциальной энергии деформации оболочки U и энергии разномодульной упругой среды V

$$U = \frac{R}{2} \int_0^\ell \int_0^{2\pi} [d_0(\varkappa_\xi^2 + \varkappa_\theta^2 + 2\nu\varkappa_\xi\varkappa_\theta + 2(1-\nu)\varkappa^2) + c_0(\varepsilon_\xi^2 + \varepsilon_\theta^2 + 2\nu\varepsilon_\xi\varepsilon_\theta + \frac{1-\nu}{2}\gamma^2)] d\xi d\theta, \quad (1.3)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^\ell \int_0^{2\pi} [c_1 w_+ w + c_2 w_- w] d\xi d\theta. \quad (1.4)$$

Здесь d_0, c_0 – цилиндрическая и тангенциальная жесткости оболочки: $d_0 = Eh^3/12(1-\nu^2)$, $c_0 = Eh/(1-\nu^2)$; E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки; $\ell = L/R$; c_1, c_2 – жесткости винклеровых сред; $w_+ = \max(w, 0)$, $w_- = \min(0, w)$ – положительная и отрицательная срежки функции w .

Если оболочка подвергается продольному сжатию усилиями p , то работу внешних сил можно выразить формулой

$$A = \frac{phR}{2} \int_0^\ell \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial w}{\partial \xi} \right]^2 d\xi d\theta. \quad (1.5)$$

В случае однородной упругой среды с жесткостью c_1 функционал (1.4) принимает вид

$$V = \frac{1}{2} \int_0^\ell \int_0^{2\pi} c_1 w^2 d\xi d\theta. \quad (1.6)$$

Предположим теперь, что торцы оболочки могут перемещаться как жесткое целое. Для того, чтобы исключить перемещение всей оболочки как жесткого целого, будем считать, что на правом краю оболочки (при $\xi = \ell$) выполнены условия жесткой заделки ($0 \leq \theta \leq 2\pi$)

$$u = 0, v = 0, w = 0, \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0; \quad (1.7)$$

либо условия шарнирного опирания

$$u = 0, v = 0, w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0. \quad (1.8)$$

Пусть теперь (ξ, η, ζ) – неподвижная система координат и срединная поверхность оболочки до деформации описывается уравнениями ($0 \leq \xi \leq \ell$)

$$\zeta = R \sin \theta, \quad \eta = R \cos \theta. \quad (1.9)$$

Предположим, что левый край оболочки (при $\xi = 0$) может смещаться вдоль образующей (на величину u_0) и в плоскости поперечного сечения (η, ζ) как жесткое целое. Будем считать, что направления осей выбраны так, что смещение края в плоскости (η, ζ) происходит в направлении оси ζ ; что соответствует граничным условиям

$$u(0, \theta) = u_0, \quad (1.10)$$

$$v(0, \theta) = b \sin \theta, \quad w(0, \theta) = b \cos \theta. \quad (1.11)$$

При повороте левого края оболочки вокруг оси оболочки на угол φ точка срединной поверхности с координатами (1.9) переходит в точку с координатами

$$\zeta_1 = R \sin(\theta + \varphi), \quad \eta_1 = R \cos(\theta + \varphi).$$

Откуда, учитывая, что связи между ортами i, j и ортами k, l имеют вид

$$\begin{cases} \mathbf{k} = -\mathbf{j} \sin \theta - \mathbf{i} \cos \theta, \\ \mathbf{l} = \mathbf{j} \cos \theta - \mathbf{i} \sin \theta; \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{i} = -\mathbf{k} \cos \theta - \mathbf{l} \sin \theta, \\ \mathbf{j} = -\mathbf{k} \sin \theta + \mathbf{l} \cos \theta; \end{cases} \quad (1.12)$$

получаем

$$v(0, \theta) = R \sin \varphi, \quad w(0, \theta) = R(1 - \cos \varphi). \quad (1.13)$$

Рассматриваемую задачу можно сформулировать так: найти минимальное значение усилия p , при котором существует нетривиальное решение вариационной проблемы

$$U + V - A \rightarrow \min. \quad (1.14)$$

Предполагается, что функции $u(\xi, \theta)$, $v(\xi, \theta)$, $w(\xi, \theta)$ при $\xi = \ell$ удовлетворяют граничным условиям (1.7) или (1.8), при $\xi = 0$ – граничным условиям перемещения края как жесткого целого

$$u(0, \theta) = u_0, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \left(\text{или } \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0 \right),$$

$$v(0, \theta) = b \sin \theta + R \sin \varphi, \quad w(0, \theta) = b \cos \theta + R(1 - \cos \varphi), \quad (1.15)$$

и выполняются условия периодичности ($0 \leq \xi \leq \ell$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^s u(\xi, 0)}{\partial \theta^s} &= \frac{\partial^s u(\xi, 2\pi)}{\partial \theta^s}, \quad \frac{\partial^s v(\xi, 0)}{\partial \theta^s} = \frac{\partial^s v(\xi, 2\pi)}{\partial \theta^s}, \\ \frac{\partial^s w(\xi, 0)}{\partial \theta^s} &= \frac{\partial^s w(\xi, 2\pi)}{\partial \theta^s}, \quad s = 0, 1, 2. \end{aligned} \quad (1.16)$$

2. Сплайн аппроксимация

Функции u , v , w будем искать в виде

$$\begin{aligned} u(\xi, \theta) &= \sum_{i=0}^{n+2} \sum_{j=0}^{m+2} u_{ij} B_i(\xi) \tilde{B}_j(\theta), \\ v(\xi, \theta) &= \sum_{i=0}^{n+2} \sum_{j=0}^{m+2} v_{ij} B_i(\xi) \tilde{B}_j(\theta), \\ w(\xi, \theta) &= \sum_{i=0}^{n+2} \sum_{j=0}^{m+2} w_{ij} B_i(\xi) \tilde{B}_j(\theta), \end{aligned} \quad (2.17)$$

где $B_i(\xi)$, $\tilde{B}_j(\theta)$ являются кубическими В-сплайнами. Свойства и способы построения В-сплайнов рассматриваются в работе [2].

Для построения сплайнов $B_i(\xi)$ на отрезке $[0, \ell]$ введем равномерную сетку

$$\xi_i = i \cdot h_\xi, \quad h_\xi = \frac{\ell}{n}, \quad i \in 0 : n,$$

и определим функции

$$B(\xi) = \frac{1}{8h_\xi^4} \left(\frac{1}{6}\xi_+^3 - \frac{2}{3}(\xi - \xi_1)_+^3 + (\xi - \xi_2)_+^3 - \frac{2}{3}(\xi - \xi_3)_+^3 + \frac{1}{6}(\xi - \xi_4)_+^3 \right),$$

$$B^*(\xi) = b_0 \xi_+^3 + b_1 (\xi - \xi_1)_+^3 + b_2 (\xi - \xi_2)_+^3 + b_3 (\xi - \xi_3)_+^3.$$

Тогда

$$B_0(\xi) = B^*(\xi) + 1, \quad \text{при } b_0 = -\frac{1}{6h_\xi^3}, \quad b_1 = \frac{1}{2h_\xi^3}, \quad b_2 = -\frac{1}{2h_\xi^3}, \quad b_3 = \frac{1}{6h_\xi^3};$$

$$B_1(\xi) = B^*(\xi) + \xi, \quad \text{при } b_0 = -\frac{1}{3h_\xi^2}, \quad b_1 = \frac{5}{6h_\xi^2}, \quad b_2 = -\frac{2}{3h_\xi^2}, \quad b_3 = \frac{1}{6h_\xi^2};$$

$$B_2(\xi) = B^*(\xi) + \frac{1}{2}\xi, \quad \text{при } b_0 = -\frac{11}{36h_\xi}, \quad b_1 = \frac{1}{2h_\xi}, \quad b_2 = -\frac{1}{4h_\xi}, \quad b_3 = \frac{1}{18h_\xi};$$

$$B_i(\xi) = B(\xi - (i-3)h_\xi), \quad i \in 3 : n-1;$$

$$B_i(\xi) = B_{n+2-i}(\ell - \xi), \quad i \in n : n+2.$$

Сплайны $\tilde{B}_j(\theta)$ строятся аналогично, только при этом используется равномерная сетка на отрезке $[0, 2\pi]$

$$\theta_j = j \cdot h_\theta, \quad h_\theta = \frac{2\pi}{m}, \quad j \in 0 : m.$$

Нетрудно убедиться, что построенные таким образом сплайны $B_i(\xi)$ и $\tilde{B}_j(\theta)$ обладают следующими свойствами:

$$B_0(0) = 1, \quad B_i(0) = 0 \quad \text{при } i \in 1 : n+2;$$

$$B_{n+2}(\ell) = 1, \quad B_i(\ell) = 0 \quad \text{при } i \in 0 : n+1;$$

$$\frac{\partial B_1(0)}{\partial \xi} = 1, \quad \frac{\partial B_i(0)}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при } i \in 0, 2 : n+2;$$

$$\frac{\partial B_{n+1}(\ell)}{\partial \xi} = 1, \quad \frac{\partial B_i(\ell)}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при } i \in 0 : n, n+2;$$

$$\frac{\partial^2 B_2(0)}{\partial \xi^2} = 1, \quad \frac{\partial^2 B_i(0)}{\partial \xi^2} = 0 \quad \text{при } i \in 0, 1, 3 : n+2;$$

$$\frac{\partial^2 B_n(\ell)}{\partial \xi^2} = 1, \quad \frac{\partial^2 B_i(\ell)}{\partial \xi^2} = 0 \quad \text{при } i \in 0 : n-1, n+1, n+2; \quad (2.18)$$

$$\tilde{B}_0(0) = 1, \quad \tilde{B}_j(0) = 0 \quad \text{при } j \in 1 : m+2;$$

$$\tilde{B}_{m+2}(2\pi) = 1, \quad \tilde{B}_j(2\pi) = 0 \quad \text{при } j \in 0 : m+1;$$

$$\frac{\partial \tilde{B}_1(0)}{\partial \theta} = 1, \quad \frac{\partial \tilde{B}_j(0)}{\partial \theta} = 0 \quad \text{при } j \in 0, 2 : m+2;$$

$$\frac{\partial \tilde{B}_{m+1}(2\pi)}{\partial \theta} = 1, \quad \frac{\partial \tilde{B}_j(2\pi)}{\partial \theta} = 0 \quad \text{при } j \in 0 : m, m+2;$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{B}_2(0)}{\partial \theta^2} = 1, \quad \frac{\partial^2 \tilde{B}_j(0)}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{при } j \in 0, 1, 3 : m+2;$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{B}_m(2\pi)}{\partial \theta^2} = 1, \quad \frac{\partial^2 \tilde{B}_j(2\pi)}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{при } j \in 0 : m-1, m+1, m+2. \quad (2.19)$$

3. Учет условий периодичности и граничных условий для сплайнов

Выпишем условия периодичности и граничные условия для сплайнов как было показано в работе [3].

Условия периодичности (1.16) для функций (2.17) будут выполнены, если положить

$$\begin{aligned} u_{i,m+2} &= u_{i,0}; \quad u_{i,m+1} = -u_{i,1}, \quad u_{i,m} = u_{i,2}, \\ v_{i,m+2} &= v_{i,0}, \quad v_{i,m+1} = -v_{i,1}, \quad v_{i,m} = v_{i,2}, \\ w_{i,m+2} &= w_{i,0}; \quad w_{i,m+1} = -w_{i,1}, \quad w_{i,m} = w_{i,2}; \quad i \in 0 : n + 2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Из граничных условий жесткой заделки (1.7) следуют равенства

$$u_{n+2,j} = v_{n+2,j} = w_{n+2,j} = w_{n+1,j} = 0, \quad j \in 0 : m + 2. \quad (3.21)$$

Если потребовать выполнения условий шарнирного опирания (1.8), то

$$u_{n+2,j} = v_{n+2,j} = w_{n+2,j} = w_{n,j} = 0, \quad j \in 0 : m + 2. \quad (3.22)$$

При $\xi = 0$ должны выполняться условия (1.15). Учитывая свойства сплайнов (2.18), из (1.15) следует, что

$$\begin{aligned} u(0, \theta) &= \sum_{j=0}^{m+2} u_{0,j} \tilde{B}_j(\theta) = u_0, \\ v(0, \theta) &= \sum_{j=0}^{m+2} v_{0,j} \tilde{B}_j(\theta) = R \sin \varphi + b \sin \theta, \\ w(0, \theta) &= \sum_{j=0}^{m+2} w_{0,j} \tilde{B}_j(\theta) = R(1 - \cos \varphi) + b \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Считая угол поворота φ малой величиной вместо (3.23) будем далее использовать условия

$$\begin{aligned} u(0, \theta) &= \sum_{j=0}^{m+2} u_{0,j} \tilde{B}_j(\theta) = u_0, \quad v(0, \theta) = \sum_{j=0}^{m+2} v_{0,j} \tilde{B}_j(\theta) \approx R\varphi + b \sin \theta, \\ w(0, \theta) &= \sum_{j=0}^{m+2} w_{0,j} \tilde{B}_j(\theta) \approx b \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Потребуем, чтобы условия (3.24) выполнялись только в точках сетки

$$\theta = \theta_k = \frac{2\pi k}{m}, \quad k \in 0 : m - 1.$$

Определим квадратную матрицу \tilde{T} порядка m с элементами

$$\begin{aligned} \tilde{t}_{0,k} &= \tilde{B}_0(\theta_k) + \tilde{B}_{m+2}(\theta_k), & \tilde{t}_{1,k} &= \tilde{B}_1(\theta_k) - \tilde{B}_{m+1}(\theta_k), \\ \tilde{t}_{2,k} &= \tilde{B}_0(\theta_k) + \tilde{B}_m(\theta_k); \\ \tilde{t}_{j,k} &= \tilde{B}_j(\theta_k), & j \in 3 : m - 1, & k \in 0 : m - 1. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Найдем решения следующих систем линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{u}_{0,j}^u \cdot \tilde{t}_{j,k} &= 1, & \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{v}_{0,j}^\varphi \cdot \tilde{t}_{j,k} &= R, \\ \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{v}_{0,j}^b \cdot \tilde{t}_{j,k} &= \sin \theta_k, & \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{w}_{0,j}^b \cdot \tilde{t}_{j,k} &= \cos \theta_k, \quad k \in 0 : m - 1. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Используя эти решения $\tilde{u}_{0,j}^u$, $\tilde{v}_{0,j}^\varphi$, $\tilde{v}_{0,j}^b$, $\tilde{w}_{0,j}^b$, $j \in 0 : m - 1$, окончательно имеем

$$u_{0,j} = u_0 \cdot \tilde{u}_{0,j}^u, \quad v_{0,j} = \varphi \cdot \tilde{v}_{0,j}^\varphi + b \cdot \tilde{v}_{0,j}^b, \quad w_{0,j} = b \cdot \tilde{w}_{0,j}^b, \quad j \in 0 : m - 1. \quad (3.27)$$

Таким образом, учет условий периодичности и трех видов граничных условий приводит к соотношениям на коэффициенты сплайнов (3.20), (3.21), (3.22) и (3.27).

4. Преобразование функционала энергии

Введем множества индексов

$$I = \{0, 1, \dots, n + 2\}, \quad J = \{0, 1, \dots, m + 2\}, \quad (4.28)$$

рассмотрим вектор $x \in R^N$, $N = 3(n + 3)(m + 3)$ и определим его компоненты x_0, x_1, \dots, x_{N-1} по правилу ($i \in I, j \in J$)

$$x_k = \begin{cases} u_{ij}, & k = f_u(i, j), \\ v_{ij}, & k = f_v(i, j), \\ w_{ij}, & k = f_w(i, j). \end{cases} \quad (4.29)$$

Здесь индексные функции $f_u(i, j)$, $f_v(i, j)$, $f_w(i, j)$ определяют номера коэффициентов сплайнов u_{ij} , v_{ij} , w_{ij} в векторе x :

$$\begin{aligned} f_u(i, j) &= i(m+3) + j, \\ f_v(i, j) &= (n+3)(m+3) + i(m+3) + j, \\ f_w(i, j) &= 2(n+3)(m+3) + i(m+3) + j. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Подставляя сплайны (2.17) в функционал (1.14) и учитывая формулы (1.1), (1.2) и (4.29), вместо функционала получим следующую функцию относительно компонент вектора x

$$\mathcal{G}(x, p) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} a_{ij} x_i x_j + \mathcal{F}(x) - \frac{ph}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} q_{ij} x_i x_j. \quad (4.31)$$

Здесь функция $\mathcal{F}(x)$ соответствует функционалу (1.4) и имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x) &= \frac{1}{2} \int_0^\ell \int_0^{2\pi} \left[c_1 \left(\sum_{k=0}^{N-1} x_k g_k(\xi, \theta) \right)_+ \left(\sum_{k=0}^{N-1} x_k g_k(\xi, \theta) \right) + \right. \\ &\quad \left. + c_2 \left(\sum_{k=0}^{N-1} x_k g_k(\xi, \theta) \right)_- \left(\sum_{k=0}^{N-1} x_k g_k(\xi, \theta) \right) \right] d\xi d\theta, \end{aligned} \quad (4.32)$$

причем каждому индексу $k \in 2N/3 : N-1$ соответствует пара индексов i, j таких, что $k = f_w(i, j)$ и $g_k(\xi, \theta) = B_i(\xi) \cdot \tilde{B}_j(\theta)$, а для индексов $k \in 0 : 2N/3 - 1$ полагаем $g_k(\xi, \theta) = 0$.

В случае же однородной упругой среды функция $\mathcal{F}(x)$ является квадратичной относительно компонент вектора x

$$\mathcal{F}(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} c_{ij} x_i x_j,$$

причем ненулевые коэффициенты матрицы квадратичной формы $\mathcal{C} = \{c_{ij}\}$ имеют вид ($i_0, k_0 \in I$; $j_0, l_0 \in J$):

$$c_{ik} = 2c_1 \cdot B_{k_0 i_0}^{00} D_{l_0 j_0}^{00}, \quad i = f_w(i_0, j_0), \quad k = f_w(k_0, l_0). \quad (4.33)$$

Коэффициенты матриц квадратичных форм $\mathcal{A} = \{a_{ij}\}$, $\mathcal{Q} = \{q_{ij}\}$ вычисляются по формулам ($i_0, k_0 \in I$; $j_0, l_0 \in J$):

$$E_1 = \frac{EhR}{2(1-\nu^2)}, \quad E_2 = \frac{Eh^3R}{24(1-\nu^2)};$$

$$a_{ik} = \frac{2E_1}{R^2} \left[B_{k_0i_0}^{11} D_{l_0j_0}^{00} + \frac{1}{2(1-\nu)} B_{k_0i_0}^{00} D_{l_0j_0}^{11} \right],$$

$$i = f_u(i_0, j_0), \quad k = f_u(k_0, l_0); \quad (4.34)$$

$$a_{ik} = \frac{E_1}{R^2} [(1-\nu) B_{i_0k_0}^{01} D_{j_0l_0}^{10} + 2\nu B_{k_0i_0}^{01} D_{l_0j_0}^{10}], \quad a_{ki} = a_{ik}$$

$$i = f_u(i_0, j_0), \quad k = f_v(k_0, l_0); \quad (4.35)$$

$$a_{ik} = -\frac{2E_1\nu}{R^2} B_{k_0i_0}^{01} D_{j_0l_0}^{00}, \quad a_{ki} = a_{ik}$$

$$i = f_u(i_0, j_0), \quad k = f_w(k_0, l_0); \quad (4.36)$$

$$a_{ik} = \frac{2E_1}{R^2} \left[B_{k_0i_0}^{00} D_{l_0j_0}^{11} + \frac{1-\nu}{2} B_{k_0i_0}^{11} D_{l_0j_0}^{00} \right] +$$

$$+ \frac{E_2}{R^4} [2B_{k_0i_0}^{00} D_{l_0j_0}^{11} + (1-\nu) B_{k_0i_0}^{11} D_{l_0j_0}^{00}],$$

$$i = f_v(i_0, j_0), \quad k = f_v(k_0, l_0); \quad (4.37)$$

$$a_{ik} = -\frac{2E_1}{R^2} B_{k_0i_0}^{00} D_{j_0l_0}^{10} + \frac{E_2}{R^4} [2B_{k_0i_0}^{00} D_{j_0l_0}^{12} + 2(1-\nu) B_{k_0i_0}^{11} D_{l_0j_0}^{10}] +$$

$$+ \frac{2E_2\nu}{R^4} B_{k_0i_0}^{20} D_{j_0l_0}^{10}, \quad a_{ki} = a_{ik}$$

$$i = f_v(i_0, j_0), \quad k = f_w(k_0, l_0); \quad (4.38)$$

$$a_{ik} = \frac{2E_1}{R^2} B_{k_0i_0}^{00} D_{j_0l_0}^{00} + \frac{E_2}{R^4} [2B_{k_0i_0}^{22} D_{l_0j_0}^{00} + 2B_{k_0i_0}^{00} D_{l_0j_0}^{22}] +$$

$$+ \frac{4E_2(1-\nu)}{R^4} B_{k_0i_0}^{11} D_{l_0j_0}^{11} + \frac{2E_2\nu}{R^4} [B_{k_0i_0}^{20} D_{l_0j_0}^{02} + B_{i_0k_0}^{20} D_{j_0l_0}^{02}],$$

$$q_{ik} = \frac{2}{R} B_{k_0i_0}^{11} D_{j_0l_0}^{00};$$

$$i = f_w(i_0, j_0), \quad k = f_w(k_0, l_0); \quad (4.39)$$

$$q_{ik} = q_{ki} = 0, \quad i = f_u(i_0, j_0), \quad k = f_v(k_0, l_0);$$

$$q_{ik} = q_{ki} = 0, \quad i = f_u(i_0, j_0), \quad k = f_w(k_0, l_0);$$

$$q_{ik} = q_{ki} = 0, \quad i = f_v(i_0, j_0), \quad k = f_w(k_0, l_0);$$

$$\begin{aligned} q_{ik} &= 0, & i &= f_u(i_0, j_0), & k &= f_u(k_0, l_0); \\ q_{ik} &= 0, & i &= f_v(i_0, j_0), & k &= f_v(k_0, l_0). \end{aligned} \quad (4.40)$$

В приведенных формулах (4.33), (4.34)–(4.39) коэффициенты $B_{k_0 i_0}^{st}$ и $D_{l_0 j_0}^{st}$ представляют собой значения интегралов от сплайнов и их производных ($i_0, k_0 \in I$; $j_0, l_0 \in J$):

$$B_{k_0 i_0}^{st} = \int_0^\ell \left[\frac{d^s B_{k_0}(\xi)}{d\xi^s} \cdot \frac{d^t B_{i_0}(\xi)}{d\xi^t} \right] d\xi, \quad s, t \in 0 : 2; \quad (4.41)$$

$$D_{l_0 j_0}^{st} = \int_0^{2\pi} \left[\frac{d^s \tilde{B}_{l_0}(\theta)}{d\theta^s} \cdot \frac{d^t \tilde{B}_{j_0}(\theta)}{d\theta^t} \right] d\theta, \quad s, t \in 0 : 2. \quad (4.42)$$

5. Определение варьируемых коэффициентов сплайнов

Далее для определенности будем считать, что при $\xi = \ell$ должны выполняться граничные условия жесткой заделки (3.21), а при $\xi = 0$ – условия (3.27) и

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = 0, \quad \text{или} \quad w_{1,j} = 0, \quad j \in 0 : m + 2. \quad (5.43)$$

Построим множества индексов, определяющих номера варьируемых коэффициентов сплайнов u_{ij} , v_{ij} , w_{ij} в векторе x (4.29):

$$\begin{aligned} I_u &= \{1..n + 1\}, \quad J_u = \{0..m - 1\}, \quad I_v = \{1..n + 1\}, \quad J_v = \{0..m - 1\}, \\ I_w &= \{2..n\}, \quad J_w = \{0..m - 1\}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Введем матрицу преобразования T размерности N с коэффициентами

$$t_{k,k} = \begin{cases} 1, & k = f_u(i, j), & \text{при } i \in I_u, j \in J_u \\ 1, & k = f_v(i, j), & \text{при } i \in I_v, j \in J_v \\ 1, & k = f_w(i, j), & \text{при } i \in I_w, j \in J_w \end{cases} \quad (5.45)$$

$$t_{k,l} = \begin{cases} +1, & k = f_u(i, m + 2), \quad l = f_u(i, 0), & \text{при } i \in I_u \\ -1, & k = f_u(i, m + 1), \quad l = f_u(i, 1), & \text{при } i \in I_u \\ +1, & k = f_u(i, m), \quad l = f_u(i, 2), & \text{при } i \in I_u \end{cases} \quad (5.46)$$

$$t_{k,l} = \begin{cases} +1, & k = f_v(i, m + 2), \quad l = f_v(i, 0), & \text{при } i \in I_v \\ -1, & k = f_v(i, m + 1), \quad l = f_v(i, 1), & \text{при } i \in I_v \\ +1, & k = f_v(i, m), \quad l = f_v(i, 2), & \text{при } i \in I_v \end{cases} \quad (5.47)$$

$$t_{k,l} = \begin{cases} +1, & k = f_w(i, m+2), \quad l = f_w(i, 0), \quad \text{при } i \in I_w \\ -1, & k = f_w(i, m+1), \quad l = f_w(i, 1), \quad \text{при } i \in I_w \\ +1, & k = f_w(i, m), \quad l = f_w(i, 2), \quad \text{при } i \in I_w \end{cases} \quad (5.48)$$

Здесь формулы (5.46)–(5.48) отвечают условиям периодичности (3.20). Кроме того, все остальные коэффициенты $t_{k,l}$ полагаются равными нулю.

Для учета условий (3.27) построим вектора $x^u, x^b, x^\varphi \in R^N$ с компонентами вида (остальные компоненты полагаются равными нулю)

$$x_k^u = \tilde{u}_{0,j}^u, \quad k = f_u(0, j), \quad \text{при } j \in J_u; \quad (5.49)$$

$$x_k^\varphi = \tilde{v}_{0,j}^\varphi, \quad k = f_v(0, j), \quad \text{при } j \in J_v; \quad (5.50)$$

$$x_k^b = \begin{cases} \tilde{v}_{0,j}^b, & k = f_v(0, j), \quad \text{при } j \in J_v \\ \tilde{w}_{0,j}^b, & k = f_w(0, j), \quad \text{при } j \in J_w \end{cases} \quad (5.51)$$

Функцию (4.31), соответствующую функционалу (1.14), можно представить в виде

$$\mathcal{G}(x, p) = (\mathcal{A}x, x) + \mathcal{F}(x) - \frac{ph}{2}(\mathcal{Q}x, x). \quad (5.52)$$

Для учета условий периодичности и граничных условий в (5.52) выполним подстановку¹

$$x = T\tilde{x} + u_0 \cdot x^u + \varphi \cdot x^\varphi + b \cdot x^b. \quad (5.53)$$

Получим

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\tilde{x}, u_0, \varphi, b, p) &= (T^* \mathcal{A} T \tilde{x}, \tilde{x}) + 2u_0 \cdot (T^* \mathcal{A} x^u, \tilde{x}) + u_0^2 \cdot (\mathcal{A} x^u, x^u) + \\ &+ 2\varphi \cdot (T^* \mathcal{A} x^\varphi, \tilde{x}) + \varphi^2 \cdot (\mathcal{A} x^\varphi, x^\varphi) + 2b \cdot (T^* \mathcal{A} x^b, \tilde{x}) + b^2 \cdot (\mathcal{A} x^b, x^b) + \\ &+ 2u_0 \varphi \cdot (\mathcal{A} x^u, x^\varphi) + 2u_0 b \cdot (\mathcal{A} x^u, x^b) + 2\varphi b \cdot (\mathcal{A} x^\varphi, x^b) + \\ &+ \mathcal{F}(T\tilde{x} + u_0 \cdot x^u + \varphi \cdot x^\varphi + b \cdot x^b) - \\ &- \frac{ph}{2} \left[(T^* \mathcal{Q} T \tilde{x}, \tilde{x}) + 2u_0 \cdot (T^* \mathcal{Q} x^u, \tilde{x}) + u_0^2 \cdot (\mathcal{Q} x^u, x^u) + \right. \\ &\left. + 2\varphi \cdot (T^* \mathcal{Q} x^\varphi, \tilde{x}) + \varphi^2 \cdot (\mathcal{Q} x^\varphi, x^\varphi) + 2b \cdot (T^* \mathcal{Q} x^b, \tilde{x}) + b^2 \cdot (\mathcal{Q} x^b, x^b) + \right. \end{aligned}$$

¹Следует отметить, что подстановка $x = T\tilde{x}$ с матрицей T вида (5.45)–(5.48) (с учетом формул (5.44)) позволяет учесть условия периодичности и граничные условия жесткой заделки на обоих краях оболочки

$$+2u_0\varphi \cdot (\mathcal{Q}x^u, x^\varphi) + 2u_0b \cdot (\mathcal{Q}x^u, x^b) + 2\varphi b \cdot (\mathcal{Q}x^\varphi, x^b)]. \quad (5.54)$$

Заметим, что функция (5.54) зависит от параметров u_0 , φ , b и только от тех компонент вектора \tilde{x} , которые соответствуют варьируемым коэффициентам сплайнов u_{ij} , v_{ij} , w_{ij} . Если эти коэффициенты обозначить через $z_1, z_2, \dots, z_{\tilde{n}-3}$ и положить

$$z_{\tilde{n}-2} = u_0, \quad z_{\tilde{n}-1} = \varphi, \quad z_{\tilde{n}} = b,$$

то функцию (5.54) можно представить в виде

$$G(z, p) = \frac{1}{2}(Az, z) + F(z) - \frac{p}{2}(Qz, z), \quad (5.55)$$

где A , Q – симметричные матрицы размерности \tilde{n} , причем A является положительно определенной матрицей.

Таким образом, исходная задача на устойчивость цилиндрической оболочки (1.14) сводится к поиску параметра критической нагрузки p , при котором существует нетривиальное решение задачи нелинейного программирования

$$G(z, p) = \frac{1}{2}(Az, z) + F(z) - \frac{p}{2}(Qz, z) \rightarrow \min. \quad (5.56)$$

Поскольку функция $G(z, p)$ является положительно однородной, т.е. $G(tz, p) = t^2G(z, p)$, решение этой задачи может быть найдено с точностью до некоторого положительного множителя t . Поэтому вместо задачи (5.56) можно рассматривать задачу условной оптимизации

$$f(z) = \frac{1}{2}(Az, z) + F(z) \rightarrow \min, \quad (5.57)$$

при ограничении

$$\frac{1}{2}(Qz, z) = 1. \quad (5.58)$$

Пусть z^* – решение этой задачи. Тогда по теореме Куна-Таккера существует множитель Лагранжа p такой, что

$$\begin{cases} Az^* + \frac{\partial F(z^*)}{\partial z} - p \cdot Qz^* = 0, \\ \frac{1}{2}(Qz^*, z^*) = 1. \end{cases}$$

Заметим, что множитель Лагранжа p соответствует параметру критической нагрузки в задаче (5.56).

В случае однородной упругой среды исходная вариационная задача (1.14) преобразуется в задачу квадратичного программирования

$$G(z, p) = \frac{1}{2}(Az, z) + \frac{1}{2}(Cz, z) - \frac{p}{2}(Qz, z) \rightarrow \min, \quad (5.59)$$

где C – симметричная неотрицательно определенная матрица размерности \tilde{n} .

Минимальное значение параметра p (при котором существует нетривиальное решение задачи (5.59)) является минимальным собственным числом обобщенной задачи на собственные значения для матриц

$$(A + C)z = p \cdot Qz. \quad (5.60)$$

6. Итерационная схема

Далее для решения задачи (5.57)–(5.58) применяется локальный метод поиска собственного числа положительно однородного оператора, описанный в работе [4].

Пусть z_0 – произвольное начальное приближение, удовлетворяющее ограничению (5.58). Предположим, что уже получена точка z_k , найдем \tilde{z}_{k+1} как решение задачи

$$f(z) = \frac{1}{2}(Az, z) + F(z) \rightarrow \min, \quad (6.61)$$

$$\frac{1}{2}(Qz, z_k) = 1. \quad (6.62)$$

Тогда следующее приближение строится по правилу

$$z_{k+1} = \frac{\tilde{z}_{k+1}}{\sqrt{s_{k+1}}}, \quad \text{где} \quad s_{k+1} = \frac{1}{2}(Q\tilde{z}_{k+1}, \tilde{z}_{k+1}).$$

В работе [4] показано, что последовательность $\{z_k\}$ сходится к стационарной точке задачи (5.57)–(5.58).

На каждом шаге этого метода необходимо решать задачу минимизации выпуклой функции (6.61) при одном линейном ограничении (6.62), что равносильно решению нелинейной системы уравнений

$$Az + \frac{\partial F(z)}{\partial z} - \frac{p}{2} \cdot Qz_k = 0, \quad (6.63)$$

$$\frac{1}{2}(Qz, z_k) = 1 \quad (6.64)$$

относительно вектора z и неизвестного множителя Лагранжа p . Уравнение (6.63) перепишем в виде

$$z = -A^{-1} \frac{\partial F(z)}{\partial z} + \frac{p}{2} \cdot A^{-1} Q z_k. \quad (6.65)$$

Пусть теперь $z(p)$ – решение уравнения (6.65) при фиксированном значении параметра p и

$$\varphi(p) = \frac{1}{2} (Q z_k, z(p)) - 1.$$

Тогда решение задачи (6.61)–(6.62) сводится к отысканию корня скалярного уравнения

$$\varphi(p) = 0. \quad (6.66)$$

Для решения уравнения (6.66) применяется метод секущих, а для поиска $z(p)$ из уравнения (6.65) используется итерационная схема метода Рундсона с шагом $\tau \in (0, 1)$:

$$z^{q+1} = \tau \cdot z^q + (1 - \tau) \cdot \left[-A^{-1} \frac{\partial F(z^q)}{\partial z} + \frac{p}{2} \cdot A^{-1} Q z_k \right]. \quad (6.67)$$

Приведем далее явные формулы для вычисления частных производных функции $F(z)$.

Поскольку функционал энергии разномодульной упругой среды (1.4) зависит только от прогиба оболочки – функции $w(\xi, \theta)$, функция $F(z)$ зависит только от тех компонент вектора z , которые соответствуют коэффициентами сплайна w_{ij} .

Пусть точке z^q в формуле (6.67) соответствует прогиб оболочки

$$w^q(\xi, \theta) = \sum_{i=0}^{n+2} \sum_{j=0}^{m+2} w_{ij}^q B_i(\xi) \tilde{B}_j(\theta).$$

Условия периодичности (3.20) будут выполнены, если переопределить сплайны $\tilde{B}_j(\theta)$ следующим образом:

$$\bar{B}_j(\theta) = \tilde{B}_j(\theta), \quad j \in 0 : m - 1;$$

$$\bar{B}_0(\theta) = \tilde{B}_0(\theta) + \tilde{B}_{m+2}(\theta), \quad \bar{B}_1(\theta) = \tilde{B}_1(\theta) - \tilde{B}_{m+1}(\theta),$$

$$\bar{B}_2(\theta) = \tilde{B}_2(\theta) + \tilde{B}_m(\theta).$$

Учитывая, что при $\xi = \ell$ должны выполняться граничные условия жесткой заделки (3.21), а при $\xi = 0$ – условия (3.27) и (5.43), получаем

$$w^q(\xi, \theta) = \sum_{i=2}^n \sum_{j=0}^{m-1} w_{ij}^q B_i(\xi) \bar{B}_j(\theta) + b^q \cdot \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{w}_{0,j}^b B_0(\xi) \bar{B}_j(\theta),$$

здесь $b^q = z_{\tilde{n}}^q$ – \tilde{n} -я компонента вектора z^q .

Пусть теперь $i \in 2 : n$, $j \in 0 : m - 1$ и z_r – r -я компонента вектора z , соответствующая коэффициенту сплайна w_{ij} , тогда

$$\frac{\partial F(z^q)}{\partial z_r} = \int_0^\ell \int_0^{2\pi} [c_1 w_+^q(\xi, \theta) + c_2 w_-^q(\xi, \theta)] B_i(\xi) \bar{B}_j(\theta) d\xi d\theta, \quad (6.68)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(z^q)}{\partial z_{\tilde{n}}} &= \int_0^\ell \int_0^{2\pi} [c_1 w_+^q(\xi, \theta) + c_2 w_-^q(\xi, \theta)] \times \\ &\times \left[\sum_{j=0}^{m-1} \tilde{w}_{0,j}^b B_0(\xi) \bar{B}_j(\theta) \right] d\xi d\theta, \end{aligned} \quad (6.69)$$

причем все остальные частные производные равны 0.

Таким образом, для определения частных производных функции $F(z)$ по формулам (6.68) и (6.69) необходимо вычислять интегралы вида

$$J = \int_0^\ell \int_0^{2\pi} g(\xi, \theta) d\xi d\theta, \quad (6.70)$$

для чего используется квадратурная формула Гаусса.

Рассмотрим равномерные сетки на отрезках $[0, \ell]$ и $[0, 2\pi]$ соответственно

$$\xi_i = i \cdot h_\xi, \quad h_\xi = \frac{\ell}{n}, \quad i \in 0 : n; \quad \theta_j = j \cdot h_\theta, \quad h_\theta = \frac{2\pi}{m}, \quad j \in 0 : m,$$

введенные ранее при построении сплайнов $B_i(\xi)$, $\tilde{B}_j(\theta)$. Тогда интеграл (6.70) можно вычислить по формуле

$$\begin{aligned} J &\approx \frac{h_\xi h_\theta}{4} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=1}^{n_k} \sum_{p=1}^{n_k} d_k d_p \cdot g(s_{ik}, t_{jp}), \\ s_{ik} &= \frac{h_\xi}{2} l_k + \frac{\xi_{i+1} + \xi_i}{2}, \quad t_{jp} = \frac{h_\theta}{2} l_p + \frac{\theta_{j+1} + \theta_j}{2}, \end{aligned}$$

где l_k , $k \in 1 : n_k$ – квадратурные узлы на отрезке $[-1, 1]$, d_k , $k \in 1 : n_k$ – квадратурные коэффициенты.

7. Результаты численных экспериментов

Следуя [1], обозначим через p_0 верхнее критическое значение напряжения, соответствующее точке бифуркации для линейной задачи при отсутствии упругих сред

$$p_0 = \frac{1}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} E \frac{h}{R}. \quad (7.71)$$

Область значений $\ell = L/R$, для которых формула (7.71) считается справедливой, лежит в пределах

$$1.38\sqrt{\frac{h}{R}} < \ell < 0.57\sqrt{\frac{R}{h}}. \quad (7.72)$$

Далее такие оболочки будем называть оболочками средней длины.

Расчеты проведены для цилиндрической оболочки с параметрами $\mu = 0.3$, $h/R = 0.05$, при этом области (7.72) будет приблизительно соответствовать диапазон

$$0.31 < \ell < 2.55. \quad (7.73)$$

Кроме того, считаем, что при $\xi = \ell$ выполняются граничные условия жесткой заделки (1.7), а при $\xi = 0$ допускается поворот и перемещение края как жесткого целого (1.11)–(1.13) и выполняется условие

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = 0.$$

Результаты численных экспериментов, приведенные в работе [3], показали, что для оболочек средней длины, в случае, если перемещения края как жесткого целого отсутствуют, численно полученные значения критической нагрузки отличаются не более чем на 5% от значения p_0 , вычисленного по формуле (7.71). Для достижения данной точности достаточно взять $n = 10$ и $m = 10$ (эти параметры определяют количество сплайнов соответственно по продольной и окружной координате).

Обозначим через \tilde{p}_0 безразмерный параметр, соответствующий верхнему значению критической нагрузки (7.71).

Рассмотрим сначала цилиндрическую оболочку в однородной упругой среде с жесткостями $c_1 = c_2 = \text{const}$, пусть $\tilde{c}_1 = c_1 R/Eh$, $\tilde{c}_2 = c_2 R/Eh$ – безразмерные параметры. Пусть \tilde{p}_c – безразмерный параметр, отвечающий значению критической нагрузки p_c , полученной как решение обобщенной задачи на собственные значения (5.60), \tilde{p}_ℓ – безразмерный параметр, соответствующий значению критической нагрузки p_ℓ .

полученной как решение задачи (5.57) – (5.58) с применением итерационной схемы локального метода поиска собственного числа

$$\tilde{p}_0 = \frac{p_0 R}{Eh}; \quad \tilde{p}_c = \frac{p_c R}{Eh}; \quad \tilde{p}_\ell = \frac{p_\ell R}{Eh}. \quad (7.74)$$

Таблица 1. ($\ell = 2$)

	k	1	2	3	4	5	6	7
1	\tilde{c}_1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	1.0	2.0
2	\tilde{p}_c	0.715	0.770	0.824	0.875	0.922	1.124	1.447
3	\tilde{p}_c/\tilde{p}_0	1.181	1.273	1.361	1.445	1.523	1.857	2.390
4	$\Delta \times 10^7$	4.491	3.204	2.701	1.102	1.807	1.007	4.899

В таблице 1 приводятся данные для сравнения значений критических параметров \tilde{p}_c и \tilde{p}_ℓ для оболочки средней длины в однородной упругой среде. В 4-й строке таблицы 1 относительная величина

$$\Delta = \frac{|\tilde{p}_c - \tilde{p}_\ell|}{\tilde{p}_c}$$

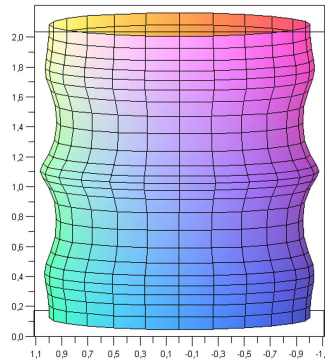
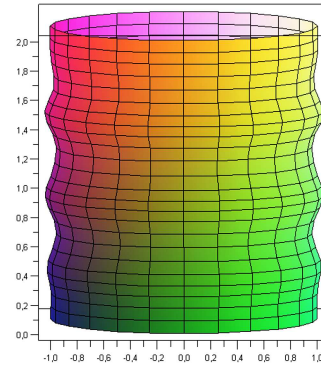
показывает, что значения критических параметров нагрузки, полученные в результате применения итерационной схемы локального метода поиска собственного числа и в результате решения обобщенной задачи на собственные значения², совпадают с высокой точностью.

На рис. 1 приведена характерная форма потери устойчивости для случаев $k = 1 - 4$. Это осесимметричная форма характеризуется сжатием оболочки вдоль образующей. На рис. 2 – характерная форма потери устойчивости для случаев $k = 5 - 7$, у этой формы перемещения края как жесткого целого не наблюдается.

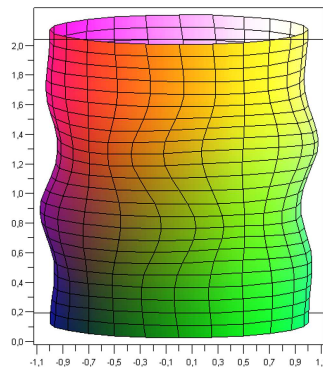
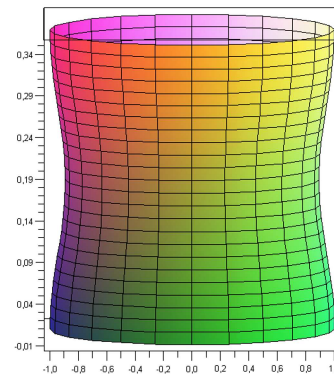
Таблица 2. ($\ell = 2, \tilde{c}_2 = 0$)

	k	8	9	10	11	12	13	14
1	\tilde{c}_1	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09	0.11	0.13
2	\tilde{p}_ℓ	0.640	0.649	0.658	0.666	0.673	0.680	0.687
3	$\tilde{p}_\ell/\tilde{p}_0$	1.057	1.073	1.087	1.100	1.112	1.124	1.135

²Для решения задачи на собственные значения применялся метод вращений Якоби.

Рис. 1. $k = 4$ Рис. 2. $k = 7$

В таблице 2 приводятся значения параметра критической нагрузки для оболочки средней длины при наличии только одной из упругих сред (внутри оболочки). Расчет произведен в процессе движения по параметру жесткости \tilde{c}_1 , описанному в работе [5], при этом критическая нагрузка постепенно растет. Характерная форма потери устойчивости приведена на рис. 3, форма не является осесимметричной, наблюдается сжатие оболочки вдоль образующей и смещение края как жесткого целого в плоскости поперечного сечения.

Рис. 3. $k = 14$ Рис. 4. $k = 17$

В таблице 3 приводятся результаты расчета параметра критической нагрузки для более короткой оболочки ($\ell = 0.35$) в разномодульной упругой среде.

Таблица 3. ($\ell = 0.35$)

	k	15	16	17	18	19	20	21
1	\tilde{c}_2	0	0	0	0	0	0	1.00
2	\tilde{c}_1	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	2.00	2.00
3	\tilde{p}_ℓ	1.698	1.771	1.844	1.916	1.988	2.376	2.012
4	$\tilde{p}_\ell/\tilde{p}_0$	2.805	2.926	3.047	3.166	3.285	3.926	3.325

Следует отметить, что осесимметричная форма потери устойчивости, приведенная на рис. 4, характеризуется сжатием вдоль образующей и реализуется как в однородной упругой среде при $0 \leq \tilde{c}_1 < 1$, так и в разномодульной среде для всех рассмотренных случаев $0 \leq \tilde{c}_1 \leq 2$, $\tilde{c}_2 = 0$. Далее, при $\tilde{c}_1 = 1$ в однородной упругой среде появляется форма со смещением края как жесткого целого в плоскости поперечного сечения, эта форма приведена на рис. 5. Наконец, в случае $\tilde{c}_1 = 2$, $\tilde{c}_2 = 1$ (рис. 6) форма потери устойчивости характеризуется как сжатием вдоль образующей, так и смещением края как жесткого целого.

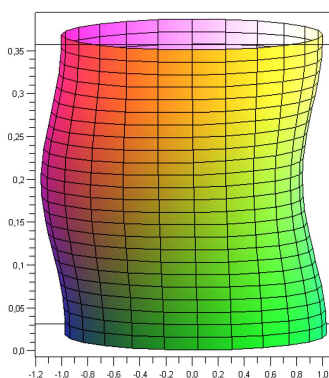
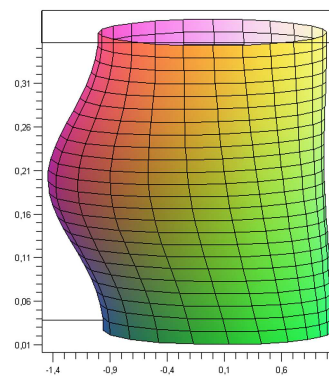


Рис. 5.

Рис. 6. $k = 21$

Литература

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
2. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн – функций. М.: Москва, 1980. 352 с.

3. Тарасов В.Н., Холмогоров Д.В. Влияние граничных условий на устойчивость цилиндрической оболочки // *Вестн. Сыкт. ун-та. Сер.1: Мат.Мех.Инф.* – 2007. – Вып.7. – С.109-122.
4. Тарасов В.Н., Холмогоров Д.В. Некоторые задачи и методы конструктивно – нелинейной механики упругих систем / Под ред. проф. Е.И. Михайловского.– Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарск. ун-та, 2001. 189 с.
5. Михайловский Е.И., Тарасов В.Н. Конструктивно–нелинейная механика пластин и оболочек // *Вестн. Сыкт. ун-та. Сер.1: Мат.Мех.Инф.* – 2010. – Вып.12. – С.5–34.

Summary

Mikhailovskii E. I., Holmogorov V.V., Gintner V.V. The longitudinal stability of a cylindrical shell at external and internal Winkler's restrictions

In this paper the problem of stability of a cylindrical shell, subjected to longitudinal compression, in the conditions of external and internal one-sided constraint restrictions Winkler's type is considered. The local method of search of eigenvalues of positively homogeneous operator is applied. In the numerical study of the problem displacements are approximated by splines.

Сыктывкарский университет

Поступила 12.09.2010