Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.12.2010

УДК 519.652

МАКСИМАЛЬНАЯ ИЗБЫТОЧНОСТЬ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФРЕЙМОВ

А.Б. Певный, А.М. Дурягин

Из комплексной матрицы Фурье выбираются первые $k + 1$ строк и последние k строк. К столбцам получившейся матрицы размера $(2k + 1) \times m$ применяется специальное унитарное преобразование, приводящее к вещественным векторам. Столбцы получившейся матрицы и образуют вещественный гармонический фрейм, обладающий свойством максимальной избыточности. Такая конструкция впервые появилась в статье [1].

Система $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ в $\mathbb{C}^n$ называется фреймом, если существуют $A, B > 0$ такие, что

$$A \|x\|^2 \leq \sum_{i=1}^{m} (\langle x, \varphi_i \rangle)^2 \leq B \|x\|^2 ,$$

для любого $x \in \mathbb{C}^n$.

Если $A = B$, то Φ – жёсткий фрейм. Система Φ является фреймом в $\mathbb{C}^n$ тогда и только тогда, когда линейная оболочка $\mathcal{L}(\Phi)$ совпадает со всем пространством $\mathbb{C}^n$ (см. доклад [2]).

Если Φ – фрейм, то $m \geq n$.

1. Фреймы с максимальной избыточностью

Определение. Пусть $\Phi = \{\varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1}\}$, $m \geq n$ – фрейм в $\mathbb{C}^n$. Говорят, что Φ обладает *максимальной избыточностью*, если при удалении любых $m-n$ элементов оставшиеся n элементов образуют фрейм.

Рассмотрим матрицу $\Phi = [\varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1}] =: \Phi[N, M]$, где $N = 1 : n, M = 0 : m - 1$.

Рассмотрим индексное множество $J = \{j_1, \ldots, j_n\} \subset M$. Столбцы матрицы $\Phi[N, J] = [\varphi_{j_1}, \ldots, \varphi_{j_n}]$ образуют фрейм тогда и только тогда, когда $\Phi[N, J]$ невырождена.

Рассмотрим матрицу Фурье $\mathcal{F}_m = \left\{\omega_m^{kl}\right\}_{k,l=0}^{m-1} = \mathcal{F}_m[M,M]$, где $\omega_m = e^{2\pi i/m}$.

Пусть $m \geq n$. Возьмем индексное множество N следующего вида

$$N = \{0, \dots, k, m-k, \dots, m-1\}, \quad |N| = n. \tag{1.1}$$

Лемма 1.1. *Столбцы матрицы $\mathcal{F}_m[N,M]$ образуют жёсткий фрейм в $\mathbb{C}^n$.*

Доказательство. Надо показать, что

$$\mathcal{F}_m[N,M](\mathcal{F}_m[N,M])^* = mI_n, \tag{1.2}$$

где * обозначает эрмитово сопряжение.

Возьмем i–ую строку матрицы $\mathcal{F}_m$ и скалярно перемножим на j–ую строку. Получим

$$\langle \mathcal{F}_m[i,M], \mathcal{F}_m[j,M] \rangle = \begin{cases} m, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Отсюда следует равенство (2). □

Замечание. *Лемма остается справедливой при любом выборе индексного множества N. Но в дальнейшем будет важно, что индексное множество N имеет вид (1).*

2. Конструкция гармонического фрейма в случае нечетного n

Пусть $n = 2k + 1$.

Рассмотрим матрицу

$$U[N,N] = \begin{bmatrix} 1 & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & I_k/\sqrt{2} & J_k/\sqrt{2} \\ \mathbb{O} & -iI_k/\sqrt{2} & iJ_k/\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

где

$$I_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_k = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Можно показать, что $UU^* = I_n$, отсюда следует, что U–унитарная матрица.

Представим матрицу $\mathcal{F}_m[N,M]$ как набор столбцов

$$\mathcal{F}_m[N,M] = [\varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1}],$$

где $\varphi_s \in \mathbb{C}^n$. Компоненты $\varphi_s[N]$ имеют вид

$$\varphi_s[N] = (1, \omega_m^s, \omega_m^{2s}, \ldots, \omega_m^{ks}, \omega_m^{(m-k)s}, \ldots, \omega_m^{(m-1)s})^T.$$

Оказывается, что при умножении векторов φ_s на матрицу U получаются вещественные векторы. Эти векторы образуют жёсткий фрейм в $\mathbb{R}^n$, который называется вещественным гармоническим фреймом.

Теорема 1. *Векторы* $f_s = U\varphi_s, \quad s \in 0 : m-1$, *образуют вещественный жёсткий фрейм в* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Покажем сначала, что столбцы матрицы $F = [f_0, \ldots, f_{m-1}]$ образуют жёсткий фрейм. Действительно, $F = [U\varphi_0, \ldots, U\varphi_{m-1}] = U\mathcal{F}_m[N,M]$.

Отсюда

$$FF^* = U\mathcal{F}_m[N,M](\mathcal{F}_m[N,M])^* U^* = UmI_nU^* = mI_n.$$

Теперь покажем, что полученные векторы имеют вещественные компоненты.

Найдем компоненты вектора $f_s[N] = U\varphi_s[N]$, где $s \in 0 : m-1$.

При умножении первой строки матрицы U на вектор $\varphi_s[N]$ будем получать компоненту равную 1:

$$f_s[0] = 1.$$

При умножении матрицы $\left[\mathbb{O}, I_k/\sqrt{2}, J_k/\sqrt{2}\right]$ на вектор $\varphi_s[N]$ будем получать компоненты

$$f_s[l] = \frac{\omega_m^{ls} + \omega_m^{(m-l)s}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\cos\frac{2ls\pi}{m}, \quad l \in 1 : k.$$

При умножении матрицы $\left[\mathbb{O}, -iI_k/\sqrt{2}, iJ_k/\sqrt{2}\right]$ на вектор $\varphi_s[N]$ будем получать компоненты

$$f_s[m-l] = \frac{-i\omega_m^{ls} + i\omega_m^{(m-l)s}}{\sqrt{2}} = \frac{\omega_m^{ls} - \omega_m^{-ls}}{i\sqrt{2}} = \sqrt{2}\sin\frac{2ls\pi}{m}, \quad l \in 1 : k.$$

Таким образом, все компоненты векторов f_s вещественные, а значит, векоторы $\{f_s\}_{s=0}^{m-1}$ образуют вещественный жёсткий фрейм. $\square$

Замечание. *В теореме попутно найден явный вид компонент векторов* f_s :

$$f_s = (1, \sqrt{2}\cos\frac{2s\pi}{m}, \dots, \sqrt{2}\cos\frac{2ks\pi}{m}, \sqrt{2}\sin\frac{2s\pi}{m}, \dots, \sqrt{2}\sin\frac{2ks\pi}{m}),$$

где $s \in 0 : m-1,$ *а* $2k+1 = n$. *Нормированные векторы* $f_s/\sqrt{n}$ *полностью совпадают с векторами из доклада [3].*

3. Конструкция гармонического фрейма в случае четного n

Пусть $n = 2k$.

Рассмотрим матрицу

$$U[N,N] = \begin{bmatrix} I_k/\sqrt{2} & J_k/\sqrt{2} \\ -iI_k/\sqrt{2} & iJ_k/\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

где

$$I_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_k = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Можно показать, что $UU^* = I_n$, отсюда следует, что U–унитарная матрица.

Представим матрицу $\mathcal{F}_m[N,M]$ как набор столбцов

$$\mathcal{F}_m[N,M] = [\varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}],$$

где $\varphi_s \in \mathbb{C}^n$. Компоненты $\varphi_s[N]$ имеют вид

$$\varphi_s[N] = (1, \omega_m^s, \omega_m^{2s}, \dots, \omega_m^{(k-1)s}, \omega_m^{(m-k)s}, \dots, \omega^{(m-1)s})^T.$$

Оказывается, что при умножении векторов φ_s с некоторыми коэффициентами на матрицу U получаются вещественные векторы. Как и в разд. 2 эти векторы образуют вещественный жёсткий фрейм в $\mathbb{R}^n$, который называется вещественным гармоническим фреймом.

Теорема 2. *Векторы* $f_s = U\omega_m^{s/2}\varphi_s,\quad s \in 0 : m-1$, *образуют вещественный жёсткий фрейм в* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Покажем сначала, что столбцы матрицы $F = [f_0, \ldots, f_{m-1}]$ образуют жёсткий фрейм. Действительно, $F = [U\omega_m^{0/2}\varphi_0, \ldots, U\omega_m^{(m-1)/2}\varphi_{m-1}] = U\mathcal{F}_m[N,M]D[M,M]$, где $D[M,M] = \operatorname{diag}(\omega_m^{s/2})_{s=0}^{m-1}$.

Отсюда

$$FF^* = U\mathcal{F}_m[N,M]D[M,M](D[M,M])^*(\mathcal{F}_m[N,M])^*U^* =$$

$$= U\mathcal{F}_m[N,M]I_m(\mathcal{F}_m[N,M])^*U^* = UmI_nU^* = mI_n.$$

Теперь покажем, что полученные векторы имеют вещественные компоненты.

Найдем компоненты вектора $f_s[N] = U\omega_m^{s/2}\varphi_s[N]$, где $s \in 0 : m-1$.

При умножении матрицы $\left[I_k/\sqrt{2}, J_k/\sqrt{2}\right]$ на вектор $\omega_m^{s/2}\varphi_s[N]$ будем получать компоненты

$$f_s[l] = \omega_m^{s/2}\frac{\omega_m^{-s/2}}{\sqrt{2}}(\omega_m^{(2l+1)s} + \omega_m^{-(2l+1)s}) = \sqrt{2}\cos\frac{(2l+1)s\pi}{m},$$

$l \in 0 : k-1$.

При умножении матрицы $\left[-iI_k/\sqrt{2}, iJ_k/\sqrt{2}\right]$ на вектор $\omega_m^{s/2}\varphi_s[N]$ будем получать компоненты

$$f_s[m-l] = \omega_m^{s/2}\frac{\omega_m^{-s/2}}{\sqrt{2}}(-i\omega_m^{(2l+1)s/2} + i\omega_m^{-(2l+1)s}) = \sqrt{2}\sin\frac{(2l+1)s\pi}{m},$$

$l \in 1 : k$.

Таким образом, все компоненты векторов f_s вещественные, а значит, векоторы $\{f_s\}_{s=0}^{m-1}$ образуют вещественный жёсткий фрейм. $\square$

Замечание. *В теореме попутно найден явный вид компонент векторов* f_s :

$$f_s = (\sqrt{2}\cos\frac{s\pi}{m}, \ldots, \sqrt{2}\cos\frac{(2k+1)s\pi}{m},$$

$$\sqrt{2}\sin\frac{s\pi}{m}, \ldots, \sqrt{2}\sin\frac{(2k+1)s\pi}{m}),$$

где $s \in 0 : m-1$, *а* $2k = n$. *Нормированные векторы* $f_s/\sqrt{n}$ *полностью совпадают с векторами из доклада [3].*

4. Максимальная избыточность вещественного гармонического фрейма

Следующая теорема для нечетного n установлена в [1]. Нам удалось найти более простое её доказательство и доказательство теоремы для четного n.

Теорема 3. *Фрейм* $\{f_s\}_{s=0}^{m-1}$ *обладает максимальной избыточностью.*

Доказательство. Сначала докажем теорему при нечетном n.

Выберем произвольное множество $J \subset M : |J| = n$.

Рассмотрим матрицу $F[N, J] = U\mathcal{F}_m[N, J]$. Нужно доказать, что эта матрица невырождена.

Введем матрицу $A[J, N] = (\mathcal{F}_m[N, J])^*$. Эта матрица имеет элементы

$$A[j, l] = \overline{\mathcal{F}_m[l, j]} = \overline{\omega_m^{lj}} = \omega_m^{-lj}, \quad j \in J, \quad l \in N.$$

Рассмотрим однородную систему

$$A[J, N]c[N] = \mathbb{O}[J]. \tag{4.3}$$

Нужно доказать, что эта система имеет только нулевое решение.

Пусть $c[N]$ решение системы. Тогда

$$\sum_{l \in N} \omega_m^{-lm} c[l] = 0, \quad j \in J. \tag{4.4}$$

Поскольку $N = \{0, 1, \dots, k, m-k, \dots, m-1\}$, то

$$\sum_{l=0}^{k} \omega_m^{-lj} c[l] + \sum_{l=0}^{k} c[m-l]\omega_m^{-j(m-l)} = 0, \quad j \in J. \tag{4.5}$$

Домножим $j-$е равенство на ω_m^{jk}. Получим

$$\sum_{l=0}^{k} \omega_m^{j(k-l)} c[l] + \sum_{l=0}^{k} c[m-l]\omega_m^{j(k+l)} = 0, \quad j \in J. \tag{4.6}$$

Рассмотрим полином

$$P(z) = \sum_{l=0}^{k} z^{k-l} c[l] + \sum_{l=0}^{k} c[m-l] z^{k+l} =$$
$$= c[0]z^k + c[1]z^{k-1} + \dots + c[k]z^0 +$$
$$+ c[m-1]z^{k+1} + c[m-2]z^{k+2} + \dots + c[m-k]z^{2k}.$$

Значит, $P(z)$– полином степени не выше $2k = n - 1$.

В силу равенства (6) полином $P(z)$ имеет n различных корней $z_j, j \in J$, где $z_j = \omega_m^j = e^{i2\pi j/m}$. Здесь $J = \{j_1, \dots, j_n\}$. При этом $0 \le j_1 < \dots < j_n \le m - 1$, значит, все корни z_j различны.

Следовательно, $P(z) \equiv 0$ и, значит, $c[l] = 0, l \in N$.

Поэтому (3) имеет только нулевое решение, следовательно, матрицы $A[J, N]$ и $F[N, J]$ неособенные.

Теперь приведем доказательство теоремы для четного n. Рассмотрим матрицу $F = U\mathcal{F}_m[N, M]D[M, M]$.

Выберем произвольное множество $J \subset M : |J| = n$.

Рассмотрим матрицу $F[N, J] = U\mathcal{F}_m[N, J]D[J, J]$.

Достаточно доказать, что матрица $A[J, N] = (\mathcal{F}_m[N, J])^*$ невырождена.

Рассмотрим однородную систему

$$A[J, N]c[N] = \mathbb{O}[J]. \tag{4.7}$$

Пусть $c[N]$ решение системы. Тогда

$$\sum_{l \in N} \omega_m^{-lm} c[l] = 0, \quad j \in J. \tag{4.8}$$

Поскольку $N = \{0, 1, \dots, k - 1, m - k, \dots, m - 1\}$, то

$$\sum_{l=0}^{k-1} \omega_m^{-lj} c[l] + \sum_{l=0}^{k} c[m - l]\omega_m^{-j(m-l)} = 0, \quad j \in J. \tag{4.9}$$

Домножим j–е равенство на $\omega_m^{j(k-1)}$. Получим

$$\sum_{l=0}^{k-1} \omega_m^{j(k-l-1)} c[l] + \sum_{l=0}^{k} c[m - l]\omega_m^{j(k+l-1)} = 0, \quad j \in J. \tag{4.10}$$

Рассмотрим полином

$$P(z) = \sum_{l=0}^{k-1} z^{k-l-1} c[l] + \sum_{l=1}^{k} c[m - l] z^{k+l-1} =$$
$$= c[0]z^{k-1} + \dots + c[k - 1]z^0 + c[m - 1]z^k + \dots + c[m - k]z^{2k-1}.$$

Значит, $P(z)$– полином степени не выше $2k - 1 = n - 1$.

В силу равенства (10) полином $P(z)$ имеет n корней $z_j, j \in J$, где $z_j = \omega_m^j$.

Здесь $J = \{j_1, \ldots, j_n\}$. При этом $0 \le j_1 < \cdots < j_n \le m-1$, значит, все корни z_j различны.

Следовательно, $P(z) \equiv 0$ и, значит, $c[l] = 0, l \in N$.

Поэтому (7) имеет только нулевое решение, следовательно, $\det(A) \neq 0$, а это значит, что $\det(\mathcal{F}_m[N, J]) \neq 0$.

□

Замечание. *Может возникнуть гипотеза, что при любом выборе индексных множеств*

$$N \subset M, J \subset M, |N| = |J| = n < m,$$

матрица $\mathcal{F}_m[N, J]$ будет невырожденной.

Однако это не так, как показывает следущий пример.

Пусть $n = 2, m = 4$. Возьмем $N = \{1, 3\} = J$.

Тогда

$$\mathcal{F}_4[N, J] = \begin{bmatrix} \omega_4^1 & \omega_4^3 \\ \omega_4^3 & \omega_4^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_4^1 & \omega_4^3 \\ \omega_4^3 & \omega_4^1 \end{bmatrix}.$$

Получили, что $\det(\mathcal{F}_4[N, J]) = \omega_4^2 - \omega_4^6 = 0$, то есть матрица $\mathcal{F}_4[N, J]$ вырождена.

Литература

1. **M. Püschel, J. Kovačevič.** Real, Tight Frames with Maximal Robustness to Erasures //*Data Compression Conference. 2005. Proceedings, p. 63–72.*
2. **Певный А.Б.** *Гармонические фреймы – фреймы с максимальной избыточностью //Семинар «DHA & CAGD». Избранные докдады. 28 марта 2007г. (http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0328)*
3. **Дурягин А.М., Соловьева Н.А.** Вещественные гармонические фреймы //*Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 9 октября 2007 г. (http://dha.spb.ru/reps07.shtml#1009)*

Summary

Pevnyi A.B., Duriagin A.M. The maximal redundancy of real harmonic frames

The author uses idea from article of M. Püschel, J. Kovačevič and constructs real harmonic frames. They possess the maximal redundancy.

Сыктывкарский университет *Поступила 20.09.2009*