Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.12.2010

УДК 519.652

ПОСТРОЕНИЕ РАВНОУГОЛЬНЫХ ЖЁСТКИХ ФРЕЙМОВ

А.Б. Певный, М.Н. Истомина, В.В. Максименко

Исследуется вопрос существования равноугольных жёстких фреймов. Для случая m=2n предлагаются алгоритмы построения равноугольных жёстких фреймов.

1. Введение

Пусть $m > n \geqslant 2$ и столбцы матрицы $\Phi = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m]$ размера $n \times m$ образуют равноугольный жёсткий фрейм в $\mathbf{R}^n$. Жёсткость фрейма равносильна выполнению равенства $\Phi\Phi^T = AI_n$, где A — константа, I_n — единичная матрица порядка n. Равноугольность означает, что

$$\|\varphi_k\| = 1 \quad \text{при всех } k \in 1:m \quad \text{и} \quad \bigl|\langle \varphi_k, \varphi_s \rangle\bigr| = c \quad \text{при } k \neq s. \tag{1.1}$$

Здесь c – фиксированное число. В докладе [2] выяснено, при каком значении c равноугольная система является жёстким фреймом. Справедливо

Предложение 1. *Равноугольная система является жёстким фреймом тогда и только тогда, когда*

$$c = \sqrt{\frac{m-n}{n(m-1)}}. \tag{1.2}$$

Для равноугольного жёсткого фрейма константа $A = \frac{m}{n}$.

2. Необходимое и достаточное условия существования равноугольного жёсткого фрейма

К сожалению равноугольные жёсткие фреймы существуют не для всех пар (n, m). Чтобы выяснить для каких существуют, а для каких - нет, рассмотрим матрицу Грама $G = \{\langle\varphi_i, \varphi_j\rangle\}_{i,j=1}^{m} = \Phi^T\Phi$. Для её элементов в силу равноугольности имеем

$$G_{ii} = 1, i \in 1 : m; \quad G_{ik} = \pm c, i \neq k.$$

Кроме того, справедливо равенство

$$G^2 = \Phi^T \left(\Phi\Phi^T\right) \Phi = \frac{m}{n} G. \tag{2.3}$$

Поскольку $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ - жёсткий фрейм, то

$$c = \sqrt{\frac{m-n}{n(m-1)}}$$

и отсюда следует, что $0 < c < 1$.

Рассмотрим матрицу

$$Q = \frac{1}{c}\left(G - I_m\right).$$

Тогда

$Q_{ii} = 0, i \in 1 : m; \quad Q_{ik} = \pm 1 = sign\,\langle\varphi_i, \varphi_k\rangle$ при $i \neq k$.

Вычислим матрицу Q^2 с учётом равенства (2.3):

$$Q^2 = \frac{1}{c^2}\left(G^2 - 2G + I_m\right) = \frac{1}{c^2}\left(\frac{m}{n}G - 2G + I_m\right) =$$

$$= \frac{1}{c^2}\left[\frac{m-2n}{n}\left(G - I_m\right) + \frac{m-n}{n} I_m\right] =$$

$$= (m-1)\, I_m + \mu_{m,n} Q, \tag{2.4}$$

где

$$\mu_{m,n} = \frac{m-2n}{nc} = (m-2n)\sqrt{\frac{m-1}{n(m-n}}. \tag{2.5}$$

Из равенства (2.4) при $i \neq j$ получим $(Q^2)_{ij} = \pm\mu_{m,n}$, откуда следует, что $\mu_{m,n}$ является целым числом. Это одно из необходимых условий существования равноугольного жёсткого фрейма.

Чтобы сформулировать необходимое и достаточное условие введём понятие сигнатурной матрицы.

Определение 2.1. *Симметричная матрица Q размера $m \times m$ называется* ***сигнатурной****, если*

$$Q_{ii} = 0, i \in 1 : m; \quad Q_{ik} = \pm 1 \text{ при } i \neq k.$$

Теорема 1. *Для того чтобы при данных n и m, $m > n \geqslant 2$, существовал равноугольный жёсткий фрейм, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1. *число $\mu_{m,n}$, определённое равенством* (2.5) *, является целым;*
2. *существует сигнатурная матрица Q такая, что*

$$Q^2 = (m-1)I_m + \mu_{m,n} Q. \tag{2.6}$$

Доказательство. Необходимость установлена выше. Докажем достаточность. Выведем матрицу

$$G = I_m + cQ, \qquad \text{где } c = \sqrt{\frac{m-n}{n(m-1)}}.$$

Тогда $G_{ii} = 1$, $i \in 1 : m$; $G_{ik} = \pm c$ при $i \neq k$. Вычислим G^2. С учётом (2.6) элементарными вычислениями получим

$$\begin{aligned} G^2 = I_m + 2cQ + c^2 Q^2 = I_m + 2cQ + c^2(m-1)I_m + c^2 \mu_{m,n} Q = \\ = \frac{m}{n}(I_m + cQ) = \frac{m}{n} G. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Из равенства $G^2 = \frac{m}{n} G$ следует, что матрица G имеет собственные числа $\frac{m}{n}$ и 0. Обозначим кратность первого числа через p, тогда 0 имеет кратность $m - p$. Поскольку $G \neq \mathbb{O}$, то $p \geqslant 1$.

Тогда симметричную матрицу G можно представить в виде

$$G = P^T \Lambda P,$$

где P - ортогональная матрица, $\Lambda = diag(\frac{m}{n}, \dots, \frac{m}{n}, 0, \dots, 0)$. Рассмотрим матрицу L размера $p \times m$ вида

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \sqrt{A} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{A} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{A} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

где $A = \frac{m}{n}$. Тогда $L^T L = \Lambda$. Для матрицы $\Phi = LP$ справедливо равенство

$$\Phi^T \Phi = P^T L^T L P = G.$$

Столбцы $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ матрицы Φ образуют равноугольную систему. Действительно, $\|\varphi_k\|^2 = \langle \varphi_i, \varphi_i \rangle = G_{ii} = 1, i \in 1 : m$;

$$\langle \varphi_i, \varphi_k \rangle = G_{ik} = cQ_{ik} = \pm c, i \neq k.$$

Кроме того, матрицы $\Phi^T \Phi = G$ и $\Phi \Phi^T$ имеют одинаковые ненулевые собственные числа. Следовательно, матрица $\Phi \Phi^T$ имеет только одно собственное число $\frac{m}{n}$ кратности p и, значит,

$$\Phi \Phi^T = \frac{m}{n} I_p.$$

Отсюда следует, что система $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ - жёсткий фрейм в $\mathbb{R}^p$. Но тогда по предложению 1 справедливо равенство

$$c = \sqrt{\frac{m-p}{p(m-1)}}.$$

Отсюда

$$\frac{m-n}{n(m-1)} = \frac{m-p}{p(m-1)},$$

то есть $p = n$. Построили равноугольный жёсткий фрейм в $\mathbb{R}^n$. Теорема доказана. $\square$

3. Оценки числа элементов равноугольного жёсткого фрейма

В докладе [2] приведено простое доказательство следующего предложения.

Предложение 2. *Пусть* $m > n \geqslant 2$. *Если* $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ *- равноугольный жёсткий фрейм в* $\mathbb{R}^n$, *то*

$$m \leqslant \frac{n(n+1)}{2} \tag{3.8}$$

Это неравенство в сочетании с теоремой 1 позволяет установить другое ограничение на число m.

Предложение 3. *Пусть* $n \geqslant 2$, $m > n + 1$. *Если* $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ *- равноугольный жёсткий фрейм в* $\mathbb{R}^n$, *то*

$$m \leqslant \frac{(m-n)(m-n+1)}{2} \tag{3.9}$$

Доказательство. По теореме 1 фрейму $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ соответствует сигнатурная матрица Q, удовлетворяющая уравнению

$$Q^2 = (m-1)I_m + \mu_{m,n}Q,$$

где $\mu_{m,n}$ задано формулой (2.5). Заменим в этой формуле n на $m - n$. Получим

$$\mu_{m,m-n} = (2n-m)\sqrt{\frac{m-1}{(m-n)n}} = -\mu_{m,n}.$$

Поэтому сигнатурная матрица $-Q$ удовлетворяет равенству

$$(-Q)^2 = (m-1)I_m + \mu_{m,m-n}(-Q).$$

Поскольку $m - n \geqslant 2$, $m > m - n$ то по теореме 1 существует равноугольный жёсткий фрейм $\{\psi_1, \dots, \psi_m\}$ в пространстве $\mathbb{R}^{m-n}$.

По предложению 2 справедливо неравенство (3.9). Предложение доказано. □

Неравенство (3.8) и (3.9) вместе с требованием целочисленности $\mu_{m,n}$ позволяют отбросить многие пары (n, m), для которых заведомо не существуют равноугольные жёсткие фреймы. Приведём ряд примеров для случая $n \geqslant 2$, $m > n + 1$.

Пример 1. $n = 3$. *Неравенство* (3.8) *имеет вид* $m \leqslant 6$.

При $m = 5$ *не выполнено неравенство* (3.9).

При $m = 6$ *оба неравенства* (3.8) *и* (3.9) *превращяются в равенства. Возникает подозрение, что в случае* $(3, 6)$ *есть равноугольный жёсткий фрейм. В явном виде он выписан в докладе [2].*

Пример 2. $n = 4$. *Неравенство* (3.8) *имеет вид* $m \leqslant 10$.

При $m = 6, 7$ *не выполнено неравенство* (3.9).

При $m = 9, 10$ *число* $\mu_{m,4}$ *не целое.*

При $m = 8$ *выполнены неравенства* (3.8) *и* (3.9) *и число* $\mu_{8,4} = 0$. *Как будет показано далее, в случае* $(4, 8)$ *равноугольный жёсткий фрейм не существует.*

4. Необходимое условие существования равноугольного жёсткого фрейма при $m = 2n$

Это условие установлено в работе [3].

Случай $m = 2n$ является довольно исключительным. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $n \geqslant 2$, $m = 2n$. *Если существует равноугольный жёсткий фрейм* $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ *в* $\mathbb{R}^n$, *то* n *- нечётное и* $m - 1$ *является суммой двух квадратов целых чисел.*

В качестве иллюстрации приведём примеры.

При чётном $n = 4$ и $m = 8$ равноугольный жесткий фрейм не существует (см. п. 4).

При $n = 5, 7, 9$ числа $m - 1 = 2n - 1$ являются суммами квадратов двух целых чисел:

$$9 = 3^2 + 0^2, \quad 13 = 3^2 + 2^2, \quad 17 = 4^2 + 1^2.$$

В случаях $(5, 10)$, $(7, 14)$, $(9, 18)$ существование равноугольных жёстких фреймов подтверждается расчётами (см. п. 4).

При $n = 11$, $m = 22$ число $m - 1 = 21$ не представимо в виде суммы двух квадратов и по теореме 2 равноугольный жёсткий фрейм не существует.

5. Нахождение равноугольных жёстких фреймов в случае $m = 2n$ методом перебора сигнатурных матриц

При $m = 2n$ число $\mu_{m,n}$ равно нулю и по теореме 1 для существования равноугольного жёсткого фрейма необходимо и достаточно существование сигнатурной матрицы Q, удовлетворяющей равенству

$$Q^2 = (m-1)I_m. \tag{5.10}$$

По определению сигнатурная матрица Q симметрична. Поэтому если через Q_i обозначить i-ю строку Q, то условие (5.10) запишется в виде

$$\langle Q_i, Q_j\rangle = \begin{cases} m-1, i=j, \\ \quad 0, i \neq j. \end{cases}$$

Условие $\langle Q_i, Q_j\rangle = m-1$ выполняется автоматически так как каждая строка Q_i содержит один 0 и $m-1$ элементов, равных ± 1. Так что нужно только обеспечить ортогональность строк: $\langle Q_i, Q_j\rangle = 0$ при $i \neq j$.

Отметим, что если сигнатурная матрица Q удовлетворяет (5.10), то после умножения j−го столбца и строки Q_j на -1 снова получим решение (5.10). Поэтому можно считать, что в первой строке Q_1 стоят единицы: $Q_1 = (0, 1, 1, \ldots, 1)$.

Далее можно пытаться строить строки $Q_2, \ldots, Q_m$ так, чтобы каждая строка была ортогональна предыдущим строкам.

При $m = 6$ это удаётся проделать вручную и получить матрицу

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

удовлетворяющую равенству $Q^2 = 5I_6$ (этот же пример приведён в [1]).

При $m = 8$ можно с помощью компьютерной программы перебирать элементы $Q_{ij} = \pm 1, i \in 2:7, j \in i+1:8$. Всего 21 элемент и 2^{21} комбинаций ± 1. Полный перебор приводит к выводу, что сигнатурная матрица, удовлетворяющая равенству $Q^2 = 7I_8$ не существует, и, следовательно, не существует равноугольный жёсткий фрейм при $n = 4, m = 8$.

При $m = 10$ программа нашла сигнатурную матрицу

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

удовлетворяющую равенству $Q^2 = 9I_{10}$.

Далее с помощью компьютерной системы Maple 9.5 проводим символьные вычисления, указанные в оказтельстве теоремы 1: строим матрицу $G = I_{10} + cQ$, находим её ортогональное разложение $G = P^T \Lambda P$, строим матрицу Φ размера 5×10:

$$\frac{1}{30} \begin{bmatrix} 10\sqrt{3} & -10\sqrt{3} & 10\sqrt{3} & 10\sqrt{3} & 10\sqrt{3} & 10\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6\sqrt{5} & 6\sqrt{5} & -6\sqrt{5} & 6\sqrt{5} & -6\sqrt{5} & 6\sqrt{5} & 12\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{30} & 2\sqrt{30} & -2\sqrt{30} & 2\sqrt{30} & 3\sqrt{30} & -3\sqrt{30} & -\sqrt{30} & 5\sqrt{30} & 0 & 0 \\ 10\sqrt{2} & 10\sqrt{2} & 10\sqrt{2} & -10\sqrt{2} & -5\sqrt{2} & 5\sqrt{2} & -5\sqrt{2} & 5\sqrt{2} & 20\sqrt{2} & 0 \\ 10 & 10 & 10 & -10 & 10 & -10 & 10 & -10 & -10 & 30 \end{bmatrix}.$$

С помощью Maple 9.5 легко проверяются равенства $\Phi\Phi^T = 2I_5$ и $\Phi^T\Phi = G$. Тем самым столбцы матрицы Φ образуют равноугольный жёсткий фрейм в $\mathbb{R}^5$.

Точно также программа нашла сигнатурные матрицы при $m = 14$ и 18, а с помощью Maple 9.5 построены равноугольные жёсткие фреймы в $\mathbb{R}^7$ и $\mathbb{R}^9$.

6. Метод попеременного проектирования для построения равноугольных жёстких фреймов

Для чисел $A = \frac{m}{n}$ и $c = \sqrt{\frac{m-n}{n(m-1)}}$ введём два множества матриц:

$$\mathscr{G}_A = \Big\{ G \in \mathbb{R}^{m \times m} \,\Big|\, G = G^T;\ G \text{ имеет собственные числа } (\underbrace{A, \ldots, A}_{n \text{ раз}}, 0, \ldots, 0) \Big\},$$

$$\mathscr{H}_c^0 = \Big\{ H \in \mathbb{R}^{m \times m} \,\Big|\, H = H^T;\ H[k,k] = 1,\ k \in 1:m;\ |H[k,l]| \le c \text{ при } k \ne l \Big\}.$$

Множество $\mathscr{H}_c^0$ является ограниченным и выпуклым.

Матрица Грама G равноугольного жёсткого фрейма принадлежит как $\mathscr{G}_A$, так и $\mathscr{H}_c^0$. Справедливо и обратное утверждение.

Предложение 4. *Если существует матрица $G_* \in \mathscr{G}_A \cap \mathscr{H}_c^0$, то существует равноугольный жёсткий фрейм из m векторов в пространстве $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Поскольку $G_* \in \mathscr{G}_A$, то G_* можно представить в виде

$$G_* = P^T \Lambda \, P,$$

где P — ортогональная матрица,

$$\Lambda = \operatorname{diag}(\underbrace{A, \ldots, A}_{n \text{ раз}}, 0, \ldots, 0).$$

Введём матрицу V размера $n \times m$:

$$V = \left[\begin{array}{cccc|ccc} \sqrt{A} & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sqrt{A} & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \sqrt{A} & 0 & \ldots & 0 \end{array} \right].$$

Тогда $V^T V = \Lambda$. Положим $\Phi = VP$ — эта матрица размера $n \times m$ как раз и будет матрицей равноугольного жёсткого фрейма.

Действительно,

$$\Phi^T \Phi = P^T V^T V P = P^T \Lambda \, P = G_*,$$

то есть G_* является матрицей Грама системы столбцов $\Phi = [\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m]$. Поскольку матрицы $\Phi \, \Phi^T$ и $\Phi^T \Phi = G_*$ имеют одинаковые ненулевые собственные числа, то $\Phi \, \Phi^T$ имеет собственные числа $\lambda_k = A$, $k \in 1 : n$. Других собственных чисел нет. Поэтому

$$\Phi \, \Phi^T = A \, I_n,$$

так что система $\Phi = [\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m]$ является жёстким фреймом.

Поскольку $G_* \in \mathscr{H}_c^0$, то

$$\begin{aligned} \|\varphi_k\|^2 &= G_*[k, k] = 1, \quad k \in 1 : m, \\ |\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle| &= |G_*[k, l]| \le c, \quad k \ne l. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Введём фреймовый потенциал

$$P(\Phi) = \sum_{k,l=1}^{m} \left[\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle\right]^2.$$

Ввиду (6.11) справедлива оценка

$$P(\Phi) \le m + (m^2 - m)\, c^2 = m + m\,(m-1)\,\frac{m-n}{n\,(m-1)} =$$

$$= \frac{m\,n + m\,(m-n)}{n} = \frac{m^2}{n}\,.$$

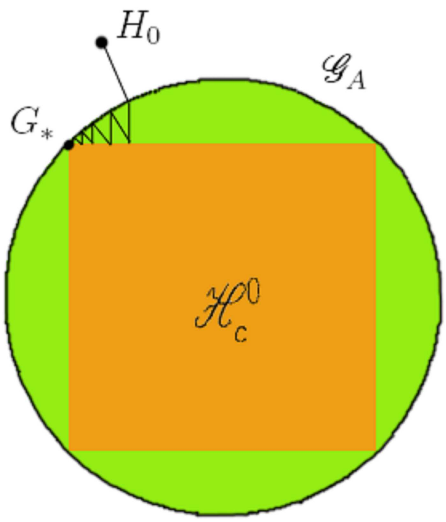
С другой стороны, для $P(\Phi)$ справедлива оценка [4]

$$P(\Phi) \ge \frac{m^2}{n}\,.$$

Если хоть в одном из неравенств $|\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle| \le c$ будет строгое неравенство, то $P(\Phi) < \frac{m^2}{n}$, что невозможно. Значит, $|\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle| = c$ при всех $k \ne l$, то есть Φ — равноугольный жёсткий фрейм. $\square$

Замечание. В точке пересечения G_* множеств $\mathscr{G}_A$ и $\mathscr{H}_c^0$ все ограничения, задающие множество $\mathscr{H}_c^0$, выполняются как равенства: $|G_*[k,l]| = c$ при всех $k \ne l$. С геометрической точки зрения G_* является крайней точкой множества $\mathscr{H}_c^0$.

Ниже приведена схема метода попеременного проектирования.



Поясним рисунок. Все матрицы G из $\mathscr{G}_A$ имеют одинаковые нормы:

$$\|G\|^2 = \sum_{k,l=1}^{m} (G[k,l])^2 = \Delta(G^2) = nA^2 = \frac{m^2}{n}\,,$$

то есть множество $\mathscr{G}_A$ лежит на сфере S_R радиуса $R = m/\sqrt{n}$.

Все крайние точки множества $\mathscr{H}_c^0$ имеют вид

$$G_*[k,k] = 1, \quad k \in 1 : m; \qquad G_*[k,l] = \pm c, \quad k \neq l,$$

и также лежат на сфере S_R :

$$\|G_*\|^2 = m + m\,(m-1)\,c^2 = \frac{m^2}{n} = R^2.$$

Множество $\mathscr{G}_A$ заполняет не всю сферу S_R. Точка пересечения $\mathscr{G}_A$ и $\mathscr{H}_c^0$ находится методом попеременного проектирования. Он подробно рассмотрен в [5].

СЛЕДСТВИЕ. *Для существования равноугольного жёсткого фрейма необходимо и достаточно выполнение условия* $\mathscr{G}_A \cap \mathscr{H}_c^0 \neq \varnothing$.

Приведём результаты численных расчётов для случая $n = 7$, $m = 14$, когда

$$A = \frac{m}{n} = 2, \qquad c = \sqrt{\frac{m-n}{n\,(m-1)}} = \frac{\sqrt{13}}{13}\,.$$

Вычисления проводились в системе Maple. В качестве начального приближения мы брали матрицу, на главной диагонали которой стоят 1, а внедиагональные элементы равны $\sqrt{c}$. При $\varepsilon = 0.01$ неравенство $\|G_k - H_{k+1}\| < \varepsilon$ выполнилось на 79-м шаге. Далее строим сигнатурную матрицу по формуле

$$Q = \big\{Q[i,i] = 0, \quad Q[i,j] = \operatorname{sign} H_{79}[i,j] \text{ при } i \neq j\big\}$$

и проверяем выполнение равенства $Q^2 = 13\,I_{14}$.

Дальнейшие вычисления повторяют собой вычисления вышеизложенного метода: построение матрицы $G = I_{14} + c\,Q$, нахождение её ортогонального разложения $G = P^T \Lambda\, P$ и построение матрицы Φ размера 7×14 :

$$\Phi^T = \begin{bmatrix}
-0.4214 & 0.3771 & 0.0602 & -0.6056 & 0.2329 & 0.1176 & 0.4899 \\
0.2649 & -0.1165 & 0.1489 & -0.6657 & -0.5434 & 0.3258 & 0.2253 \\
0.0696 & 0.2487 & 0.1128 & -0.2336 & 0.2358 & 0.8805 & -0.1903 \\
-0.3938 & -0.0810 & 0.7188 & -0.0499 & 0.3574 & -0.4319 & 0.0789 \\
-0.4429 & 0.2692 & 0.6080 & 0.0840 & -0.4522 & 0.3666 & 0.1230 \\
0.3823 & 0.2731 & 0.1848 & -0.6041 & 0.0578 & -0.6140 & 0.0412 \\
-0.0998 & 0.7667 & -0.2122 & 0.4032 & 0.0553 & 0.2972 & 0.3184 \\
0.5460 & -0.0037 & 0.7921 & -0.0205 & -0.0267 & 0.1240 & -0.2365 \\
0.3698 & 0.2590 & 0.2108 & 0.0260 & 0.8129 & 0.0407 & 0.2989 \\
-0.4481 & -0.6048 & 0.1208 & -0.0803 & -0.1906 & 0.0413 & 0.6127 \\
0.5252 & -0.6295 & -0.0046 & 0.0619 & 0.1867 & 0.4743 & 0.2520 \\
0.1454 & -0.0839 & 0.4286 & 0.7354 & -0.0093 & -0.0558 & 0.4933 \\
0.3719 & 0.0702 & -0.3355 & -0.0795 & -0.0595 & -0.1468 & 0.8445 \\
0.4111 & 0.4470 & 0.1149 & 0.1990 & -0.7211 & -0.2239 & 0.0889
\end{bmatrix}.$$

С помощью системы Maple легко проверяются равенства $\Phi\,\Phi^T = 2\,I_7$ и $\Phi^T\Phi = G$. Значит, столбцы матрицы Φ образуют равноугольный жёсткий фрейм в $\mathbb{R}^7$.

Литература

1. **Holmes R. B., Paulsen V. I.** Optimal frames for erasures // *Linear Algebra Appl. 2004. V. 377. P. 31-51.*
2. **Малозёмов В. Н., Певный А. Б.** Равноугольные системы векторов и жёсткие фреймы //*Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 18 сентября 2007 г. http://dha.spb.ru/reps07.shtml #0918*
3. **Sustik M. A., Tropp J. A., Dhillon I. S., Heath R. W.** On the existence of equiangular tight frames // *Linear Algebra Appl. 2007. V. 426. P. 619-635.*
4. **Малозёмов В. Н., Певный А. Б.** Четвёртое определение жёсткого фрейма // *Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 30 мая 2007 г. http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0530*
5. **Истомина М. Н., Певный А. Б.** Метод попеременного проектирования для построения равноугольных жестких фреймов //*Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 2 июля 2008 г. http://dha.spb.ru/reps08.shtml #0702*

Summary

Pevnyi A.B., Istomina M.N., Maksimenko V.V. Construction of equiangular tight frames

Investigate the question of the existence of equiangular tight frame. For the case m = 2n proposed algorithms equiangular tight frames.

Сыктывкарский университет *Поступила 12.04.2010*