Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.12.2010

УДК 621.391.1:519.27

ОЦЕНКА СНИЗУ КОЛИЧЕСТВА ЭЛЕМЕНТОВ СФЕРИЧЕСКОГО ДИЗАЙНА С ПОМОЩЬЮ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

А. Б. Певный, Н. О. Котелина

Приводится теорема Дельсарта для оценки снизу числа элементов сферического дизайна и ее модификация, использующая только четные полиномы. Рассматривается соответствующая сеточная задача линейного программирования и приводятся результаты расчетов.

1. Обозначения и предварительные сведения.

Используем скалярное произведение $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ векторов x, $y \in \mathbb{R}^n$ и норму $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Пусть
$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$$
— единичная сфера в $\mathbb{R}^n$.

Определение 1.2. *Пусть t — натуральное число. Система векторов*
$\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$ *называется сферическим t - дизайном, если*
$$\frac{1}{\sigma_n}\int_{S^{n-1}} P(x)\,dS = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} P(\varphi_i) \tag{1.1}$$
для всех полиномов $P(x)$ степени не выше t. Здесь σ_n – площадь сферы S^{n-1}.

Одной из важных задач теории дизайнов является нахождение для данных n и t сферического t - дизайна с минимальным количеством элементов (см., например, [4]). Важная оценка снизу для $m = |\Phi|$ была получена Ф. Дельсартом ([1], [5]). Формулировка и доказательство теоремы Дельсарта используют полиномы Гегенбауэра.

2. Полиномы Гегенбауэра и теорема Дельсарта.

Зафиксируем натуральное $n \geqslant 2$. Рассмотрим вес

$$w_n(u) = (1-u^2)^{\frac{n-3}{2}}, \quad u \in [-1,\ 1].$$

Пусть $\{Q_k\}_{k=0}^{\infty}$ — система полиномов Гегенбауэра. Она обладает свойством ортогональности с весом $w_n(u)$:

$$\int_{-1}^{1} Q_k(u)Q_s(u)w_n(u)du = 0, \quad k \neq s,$$

и для них выполняется условие нормировки

$$Q_k(1) = 1.$$

Для полиномов Гегенбауэра справедливо также рекуррентное соотношение:

$$Q_0(u) \equiv 1, \qquad Q_1(u) = u,$$
$$(k+n-2)Q_{k+1}(u) = (2k+n-2)uQ_k(u) - kQ_{k-1}(u).$$

Из этого следует, что

$$uQ_k(u) = \frac{(k+n-2)Q_{k+1}(u) + kQ_{k-1}(u)}{2k+n-2}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Обозначив

$$\alpha_k = \frac{k+n-2}{2k+n-2} \quad \text{и} \quad \beta_k = \frac{k}{2k+n-2},$$

получим

$$uQ_k(u) = \alpha_k Q_{k+1}(u) + \beta_k Q_{k-1}(u), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.2}$$

Заметим, что при $n \geqslant 2$ и $k \geqslant 1$ числа α_k и β_k положительные.

Ф. Дельсарт [5] в 1973 г. предложил замечательный метод оценивания количества элементов сферического дизайна порядка t. Зафиксируем натуральное $d \geqslant t$. Пусть $\mathcal{P}_d^+$ — множество алгебраических полиномов степени не выше d, удовлетворяющих условиям

$$F(x) \geqslant 0 \text{ для всех } x \in [-1,\ 1] \text{ и } F(1) > 0.$$

Каждый полином $F(x)$ разложим по полиномам Гегенбауэра

$$F(x) = \sum_{k=0}^{d} F_k Q_k(x),$$

где коэффициенты Фурье F_k определяются следующей формулой

$$F_k = \frac{(F, Q_k)}{\|Q_k\|^2}, \quad k \in 0 : d.$$

Здесь (,) – скалярное произведение в $L_2[-1,\ 1]$ с весом $w_n(u)$, $\|Q_k\|^2 = (Q_k, Q_k)$. Введем множество

$$M(n, t, d) = \{F \in \mathcal{P}_d^+ |\ F_k \leqslant 0, \quad k \in t+1 : d\}.$$

Теорема 1. *(Дельсарт [5].) Пусть $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$ — сферический дизайн порядка t. Тогда*

$$m \geqslant \sup\left\{\frac{F(1)}{F_0}, \quad F \in M(n,t,d)\right\}, \tag{2.3}$$

где F_0 – нулевой коэффициент Фурье полинома $F(x)$.

Замечание. *Теорему Дельсарта еще можно сформулировать в следущем виде. Обозначим $b(n, t)$ минимальное количество элементов сферического дизайна порядка t в пространстве $\mathbb{R}^n$ (при условии, что хотя бы один такой сферический дизайн существует). Тогда справедливо неравенство*

$$b(n,t) \geqslant \sup\left\{\frac{F(1)}{F_0}, \quad F \in M(n,t,d)\right\},$$

где F_0 – нулевой коэффициент Фурье полинома $F(x)$.

Для оценки снизу количества элементов сферического t - дизайна можно также использовать модификацию теоремы 1, использующую только четные полиномы.

3. Модификация теоремы Дельсарта, использующая только четные полиномы.

Пусть везде дальше t нечетное и $t = 2s+1$. Введем класс полиномов

$$\widehat{M}(n,t,d) := \{F \in M(n,t,d) \text{ и } F(-u) = F(u),\ \forall u \in [-1,\ 1]\}.$$

Тогда справедлива теорема, которая впервые появилась в работе [3]. Нами приведено более подробное и точное доказательство.

Теорема 2. *Справедливо неравенство*

$$b(n,t) \geqslant \sup\left\{\frac{2F(1)}{F_0}, \quad F \in \widehat{M}(n,t,d)\right\}, \tag{3.4}$$

где F_0 – нулевой коэффициент Фурье полинома $F(x)$.

Доказательство. Возьмем $\widehat{F} \in \widehat{M}(n,t,d)$. Докажем, что $b(n,t) \geqslant \frac{2\widehat{F}(1)}{\widehat{F_0}}$. Введем $F^*(u) = (1+u)\widehat{F}(u)$. Проверим, что $F^* \in M(n,t,d+1)$. Так как $\widehat{F}(u)$ неотрицательная на $[-1,\ 1]$ и $\widehat{F}(1) > 0$, то F^* тоже будет неотрицательной на $[-1,\ 1]$ и $F^*(1) > 0$. Рассмотрим коэффициенты Фурье для F^*. При четном k интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку равен нулю. Получаем

$$F_k^* = \frac{1}{\|Q_k\|^2}\left\{\int_{-1}^{1}\widehat{F}(u)Q_k(u)w_n(u)du + \int_{-1}^{1}u\widehat{F}(u)Q_k(u)w_n(u)du\right\} = \widehat{F}_k.$$

При нечетном k, воспользовавшись соотношением (2.2), получим

$$\begin{aligned}
F_k^* &= \frac{1}{\|Q_k\|^2}\left\{\int_{-1}^{1}\widehat{F}(u)Q_k(u)w_n(u)du + \int_{-1}^{1}u\widehat{F}(u)Q_k(u)w_n(u)du\right\} = \\
&= \frac{1}{\|Q_k\|^2}\int_{-1}^{1}u\widehat{F}(u)Q_k(u)w_n(u)du = \\
&= \frac{1}{\|Q_k\|^2}\int_{-1}^{1}\widehat{F}(u)[\alpha_k Q_{k+1}(u) + \beta_k Q_{k-1}(u)]w_n(u)du = \\
&= \frac{1}{\|Q_k\|^2}\left[\alpha_k\|Q_{k+1}\|^2\widehat{F}_{k+1} + \beta_k\|Q_{k-1}\|^2\widehat{F}_{k-1}\right].
\end{aligned}$$

Проверим, что

$$F_k^* \leqslant 0, \quad k \in t+1 : d+1.$$

Пусть k четное, $k \geqslant t+1$. Тогда

$$F_k^* = \widehat{F}_k \leqslant 0.$$

Пусть k нечетное, $k \geqslant t+1$. Тогда $k-1$, $k+1$ четные и $k-1$, $k+1 \geqslant t+1$, так как t нечетное. Поскольку $\widehat{F} \in \widehat{M}(n,t,d)$, то $\widehat{F}_{k-1} \leqslant 0$, $\widehat{F}_{k+1} \leqslant 0$ и, следовательно, $F_k^* \leqslant 0$. Из этого следует, что $F^* \in M(n,t,d+1)$. По оценке Дельсарта (2.3) получаем, что

$$b(n,t) \geqslant \frac{F^*(1)}{F_0^*}, \tag{3.5}$$

причем

$$F_0^* = \frac{1}{\|Q_0\|^2}\int_{-1}^{1}(1+u)\widehat{F}(u)w_n(u)du = \widehat{F}_0, \quad F^*(1) = 2\widehat{F}(1)$$

Следовательно (3.5) можно переписать в виде

$$b(n,t) \geqslant \frac{2\widehat{F}(1)}{\widehat{F}_0}.$$

В силу того, что $\widehat{F}$ – произвольная функция из класса $\widehat{M}(n,t,d)$, то, переходя к супремуму в неравенстве (3.5), получаем оценку (3.4). Теорема доказана. $\square$

4. Сеточная задача линейного программирования.

Для данных n, t, используя оценку Дельсарта (3.4), оценим величину $b(n,t)$. Будем предполагать, как и ранее, что t нечетное, $t = 2s+1$. Выберем $d > s$ и равномерную сетку на $[0,\ 1]$. Положим

$$u_i = \frac{i-1}{M_0}, \quad i = 1, \dots, M_0+1.$$

Задача оценивания $b(n,t)$ сводится к нахождению полинома $F(u) \in \widehat{M}(n,t,2d)$, имеющего вид

$$F(u) = F_0 + \sum_{k=1}^{d} F_k Q_{2k}(u),$$

где $F_k \leqslant 0$ при $k \geqslant s+1$, максимизирующего $F(1)$, при этом F_0 будем фиксировать, взяв равным 1. Запишем соответствующую задачу линейного программирования. Тогда

$$\begin{aligned}
&L(F_1, \dots, F_d) = 2F(1) = 2 + 2(F_1 + F_2 + \dots + F_d) \to \max,\\
&F(u_i) = 1 + \sum_{k=1}^{d} F_k Q_{2k}(u_i) \geqslant 0,\ i \in 1 : M_0+1,\\
&F_0 = 1,\\
&F_k \leqslant 0, \quad k \in s+1 : d.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Если $(F_1^*, \dots, F_d^*)$ — оптимальное решение (4.6), то $F^*(u) = 1 + \sum_{k=1}^{d} F_k^* Q_{2k}(u)$ — оптимальный полином. Для того, чтобы на отрезке $[0,\ 1]$ выполнялось условие неотрицательности, введем

$$\varepsilon = -\min\left\{F^*(u),\ u \in [0,\ 1]\right\}.$$

Тогда рассмотрим полином

$$\widetilde{F}(u) = F^*(u) + \varepsilon.$$

Заметим, что $\widetilde{F}(u) \geqslant 0$ на $[0,\ 1]$ и $\widetilde{F}(u) \in \widehat{M}(n,t,d)$. Коэффициенты $\widetilde{F}$ и F^* связаны соотношениями

$$\widetilde{F_k} = F_k^*, \quad k = 1 : d, \quad \widetilde{F}_0 = F_0^* + \varepsilon.$$

По оценке Дельсарта (3.4)

$$b(n,t) \geqslant \frac{2\widetilde{F}(1)}{\widetilde{F_0}} = \frac{2\,(F(1)+\varepsilon)}{1+\varepsilon} = \frac{L^*+2\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

где $L^* = L(F_1^*, \ldots, F_d^*)$ – максимальное значение целевой функции.

5. Модифицированный симплекс-метод.

В задаче (4.6) представим

$$F_k = F_k' - F_k'', \quad F_k' \geqslant 0,\ F_k'' \geqslant 0, \quad k \in 1:s; \quad F_k = -F_k'', \quad F_k'' \geqslant 0, \quad k \in s{+}1:d.$$

Добавим переменные $z_i,\ i \in 1 : M_0{+}2$ и запишем задачу, эквивалентную (4.6):

$$\begin{aligned}
&\widetilde{L}(F_1,\ldots,F_d) = -2F(1) = -2 - 2\sum_{k=1}^{s}(F_k' - F_k'') + 2\sum_{k=s+1}^{d} F_k'' \to \min,\\
&F_0 + \sum_{k=1}^{s} Q_{2k}(u_i)(F_k' - F_k'') - \sum_{k=s+1}^{d} Q_{2k}(u_i)F_k'' - z_i = 0,\ i \in 1 : M_0+1,\\
&F_0 = 1,\\
&F_k' \geqslant 0, \quad k \in 1:s; \quad F_k'' \geqslant 0, \quad k \in 1:d.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Введем индексные множества $M = 1 : M_0+2, \quad D = 1 : d$ и рассмотрим матрицу $A[M,D]$, где

$$\begin{aligned}
&A[i,k] = Q_{2k}(u_i), \qquad i \in 1 : M_0+1, \quad k \in 1:d;\\
&A[M_0+2,k] = 0, \qquad k \in 1:d.
\end{aligned}$$

Тогда систему ограничений в задаче (5.7) можно переписать в виде

$$F_0\mathbf{1}[M] + \sum_{k=1}^{s}(F_k' - F_k'')A[M,k] - \sum_{k=s+1}^{d} F_k''A[M,k] - \sum_{i=1}^{M_0+1} z_i e_i = b[M],$$

где

$$\mathbf{1}[M] = (1,\ldots,1)^T, \quad b[M] = (0,\ldots,0,1)^T.$$

Задачу (5.7) будем решать с помощью модифицированного симплекс-метода. Укажем начальный базисный план

$$F_0 = 1, \quad z_i = 1 \quad \text{при } i \in 1 : M_0+1,$$

остальные переменные равны нулю. Проиндексируем неизвестные в задаче (5.7). Пусть x – массив неизвестных в задаче (5.7). Положим

$$x[k] = F'_k, \quad k \in 1:s; \quad x[0] = F_0; \quad x[-k] = F''_k, \quad k \in 1:d;$$

$$x[s+i] = z_i, \quad i \in 1:M_0+1.$$

Тогда множество базисных индексов N' выглядит следующим образом: для выбранного нами начального базисного плана

$$N' = \{0, s+1, \ldots, s+M_0+1\}, \quad |N'| = M_0+2.$$

Столбцы, соответствующие базисным неизвестным, линейно независимы. Это следует из того, что для базисной матрицы $A[M, N']$ можно указать обратную базисную матрицу $B[N', M]$ (смотри далее формулы (5.8)). Базисная матрица и обратная к ней имеют следующий вид при $M_0 = 4$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.8}$$

При составлении программы мы не будем хранить в памяти компьютера всю матрицу коэффициентов, достаточно хранить матрицу $A[M, D]$.

Обратим внимание на то, как в нашей программе будут вычисляться оценки.

Возьмем границу barrier=10^{-14}. Будем продолжать вычисления, пока максимальная оценка $max \geqslant barrier$. Оценки будем вычислять по следующим формулам

$$\begin{aligned} \varepsilon[F'_k] &= y[M]A[M,k] + 2 \text{ при } k \in 1:s; \\ \varepsilon[F''_k] &= -\varepsilon[F'_k] \text{ при } k \in 1:s; \\ \varepsilon[F''_k] &= -y[M]A[M,k] - 2 \text{ при } k \in s+1:d; \\ \varepsilon[z_i] &= y[M](-e_i) = -y[i] \text{ при } i \in 1:M_0+1. \end{aligned}$$

6. Результаты работы программы.

Результаты работы программы поместим в таблицу

n	t	d	M_0	L^*	ε	$\frac{L^*+2\varepsilon}{1+\varepsilon}$	$b_D(n,t)$	K
2	3	2	100	4	0	4	4	4
3	5	3	100	12.006	7.17e-004	11.99	12	12
4	3	2	100	8	0	8	8	8
4	5	3	100	20.007	0.002	19.97	20	24
4	7	5	100	41.1	7.54e-004	41.07	40	46
4	7	5	200	41.1	1.81e-004	41.09	40	46
4	9	7	100	73.64	0.006	73.20	70	86
4	11	11	100	120.05	0.06	119.33	112	120
4	19	19	1000	499.35	0.002	498.61	440	720
8	7	4	100	240	0.001	239.70	240	240
8	11	8	800	1856	2.28e-004	1855.50	1584	2400
8	13	12	1000	4360.7	7.02e-004	4357.7	3432	24240
8	15	16	500	9191.5	0.005	9140	6864	26400
12	5	3	100	156.08	6.34e-004	155.98	156	756
12	7	4	100	728.52	0.002	727.08	728	756
12	9	6	600	2939.80	2.28e-4	2939.10	2730	8064
12	11	7	1000	10604	1.05e-4	10602	8736	50400

В приводимой выше таблице используются обозначения: K — наименьшее известное количество элементов сферического дизайна, приведенное в [3]. Там же указан источник, где описан сферический дизайн с K элементами, например, при $n = 4$, $t = 11$, дизайн со 120 элементами описан в [2]; $b_D(n,t)$ — оценка Дельсарта, вычисляемая по следующей формуле (см. [1], [5])

$$b_D(n,t) = 2C_{n+s-1}^{n-1} \text{ для } t = 2s+1.$$

Литература

1. **Delsarte P., Goetals J.M., Seidel J.J.** Spherical codes and designs // *Geom. Dedicata. 1977. V. 6. P. 363-388.*

2. **Андреев Н.Н.**Минимальный дизайн 11-го порядка на трехмерной сфере//*Матем. заметки. Сер. 2000. Т. 67. №4. С. 489-497.*

3. **de la Harpe P., Pache C., Venkov B.**Construction of spherical cubature formulas, using lattices// *Алгебра и анализ. 2006. Т. 18. Вып. 1. P. 162-186.*

4. **Bonnai E., Munemasa A., Venkov B.** The nonexistence of certain tight spherical designs // *Алгебра и анализ. 2004. Т. 16. Вып. 4. P. 1-23.*

5. **Delsarte P.** An algebraic approach to the association schemes of coding theory// *Philips Res. Reports(Suppl.). 1973. V. 10.*

Summary

Pevnyi A.B., Kotelina N. O. Lower bound for cardinality of spherical design using linear programming

The theorem of Delsarte for lower bound for cardinality of spherical design and its modification using only even polynomials are given. The corresponding grid problem of linear programming is considered and the results of calculations are given.

Сыктывкарский университет *Поступила 2.11.2010*