

УДК 51-72:539.3

**ПОЛВЕКА С МЕХАНИКОЙ ОБОЛОЧЕК
(часть первая – линейная теория)**

Е. И. Михайловский

Статью можно рассматривать как воспоминания, предназначенные для специалистов по механике оболочек или, что более важно, для аспирантов, выбравших механику оболочек в качестве области диссертационных притязаний. Статья, планируемая к опубликованию, как единое целое, в процессе написания вышла за рамки разумного объема, что побудило автора разделить её на две части. В данном выпуске "Вестника" публикуется первая часть, в которой излагаются основные результаты автора и некоторые обстоятельства их получения в области линейной теории оболочек.

Основные обозначения

$u = (u_\alpha, w, u_\beta)^\oplus, \bar{u} = (\bar{u}_\alpha, \bar{w}, \bar{u}_\beta)^\oplus$ – столбцы перемещений и функций напряжения (\oplus – знак транспонирования);

$t = (T_\alpha, S, T_\beta)^\oplus$ – тангенциальные усилия;

$m = (M_\alpha, H, M_\beta)^\oplus$ – моменты;

$p = (p_\alpha, p_n, p_\beta)^\oplus$ – удельная поверхностная нагрузка;

$\varepsilon = (\varepsilon_\beta, -\frac{\omega}{2}, \varepsilon_\alpha)^\oplus$ – параметры тангенциальной деформации;

$\varkappa = (\varkappa_\beta, -\tau, \varkappa_\alpha)^\oplus$ – параметры изгибной деформации;

$\partial q = (Q_{\nu\nu}, Q_{\nu t}, Q_{\nu n}, M_{\nu\nu})^\oplus$ – статические граничные величины Кирхгофа;

$\partial u = (u_\nu, u_t, w, \vartheta_\nu)^\oplus$ – геометрические граничные величины Кирхгофа;

$\partial b = (B_\nu, B_t, B_n, F_t)^\oplus$ — статические граничные величины К.Ф. Черныха;

$\partial \varkappa = (-\varkappa_{tt}, \varkappa_{t\nu}, -\varkappa_{tn}, \varepsilon_{tt})^\oplus$ — геометрические граничные величины К.Ф. Черныха;

$\Omega, \partial\Omega$ — область срединной поверхности оболочки и граница этой области;

$\sigma_t = -\frac{1}{R_t}, \rho_t, \tau_t = -\frac{1}{R_{\nu t}}$ — нормальная кривизна, геодезическая кривизна, геодезическое кручение срединной поверхности оболочки вдоль контура $\partial\Omega$;

$c_0 = \frac{Eh}{1-\nu^2}$ — тангенциальная жесткость оболочки;

$d_0 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость оболочки;

$h, c = \frac{h}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}$ — толщина оболочки и параметр толщины;

E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки;

$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ — модуль сдвига.

1. Впервые с задачей по механике оболочек я столкнулся при выполнении дипломной работы "Концентрация напряжений в сферической оболочке возле эллиптического отверстия". Основное (разрешающее) уравнение о концентрации напряжений возле эллиптического отверстия в сферической оболочке радиуса R , испытывающей действие избыточного внутреннего давления, имеет вид [1]

$$\Delta^2 \Phi + \frac{i}{cR} \Delta \Phi = 0, \quad (1)$$

где $\Phi(\rho, \theta) = Ehcw(\rho, \theta) + i\varphi(\rho, \theta)$; w, φ — соответственно прогиб и функция напряжений; ρ, θ — изотермические координаты, такие, что контур эллиптического отверстия задается уравнением $\rho = \rho_0 = const$;

$$\Delta(\cdot) = \frac{1}{\mathcal{H}^2} \left(\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \theta^2} \right), \quad \mathcal{H}^2 = \frac{c_*^2}{2} (\operatorname{ch} 2\rho - \cos 2\theta),$$

$c_* = \sqrt{a^2 + b^2}$ — фокусное расстояние эллиптического отверстия, с полуосями a и b .

Решение уравнения (3.1) в работе [1] представлено в следующем виде

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_1 + \Phi_2, \\ \Phi_1 &= d \ln \left[\frac{c_*^2}{2} (\operatorname{ch} 2\rho - \cos 2\theta) \right] + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) e^{-n\rho} \cos n\theta, \\ \Phi_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} (A_n + iB_n) Me_n^{(1)}(\rho) Ce_n(\theta),\end{aligned}\quad (2)$$

где $Me_n^{(1)}(\rho)$ — функция Маттье-Ханкеля, $Ce_n(\theta)$ — периодическая функция Маттье; $d, a_n, b_n, A_n, B_n, n \in 0 : \infty$ — константы, подлежащие определению из граничных условий.

Таким образом, передо мной была поставлена задача найти приближенное решение уравнения (3.1) с использованием формул (2). Основная трудность заключалась в том, чтобы перейти на "ты" с функциями Маттье по изысканной мною где-то книге [2]. В результате расчетов нужно было получить коэффициент концентрации напряжений σ_θ в виде

$$k = k_1 + k_2 \cos 2\theta. \quad (3)$$

Вычисления мною проводились с использованием тогда еще непотопного арифмометра "Феликс". Числа k_1, k_2 формулы (3.3) получились отличными от приведенных в статье [1], но более согласующимися с известным решением для случая кругового отверстия. Этого оказалось достаточно моему научному руководителю профессору К.Ф.Черныху, чтобы "ничтоже сумнящихся" заявить в отзыве на дипломную работу: "Обнаружил грубость и ошибочность формул академика Г.Н.Савина". После некоторого раздумья сомнения все же посетили К.Ф. и, обращаясь ко мне, он предложил: "Поставим-ка мы на всякий случай хорошо. Тебе ведь все равно?.." Мне не было все равно, но за нападение на академика кто-то должен был ответить. Пришлось ответить мне ... Рецензент, Рафаил Матвеевич Финкельштейн, поставил оценку "отлично" со словами: "Он заслуживает такой оценки хотя бы за то, что разобрался с функциями Маттье". Признаюсь, что как слова научного руководителя, так и слова рецензента были для меня настоящим откровением. Но тем не менее мое вхождение в мир оболочек состоялось ...

2. После окончания университета в 1962 году я поступил на работу в Лабораторию прочности и износостойчивости ВНИИ по машинам для промышленности строительных материалов (ВНИИСтроммаш) в качестве инженера. В то время в лаборатории была лишь одна тема

по механике оболочек, связанная с расчетом на прочность горизонтальных автоклавов. Руководил этой темой аспирант заочной формы обучения ЛИИЖТа, старший научный сотрудник ВНИИСтроммаш'а К.З.Искалиев. В связи с моим приходом в лабораторию "на основании анализа и классификации строммашин по характеру силового воздействия ... была выявлена большая группа машин, подверженных действию статических нагрузок, рабочим органом которых являются валки (вальцы)" [3]. Так у меня появилась самостоятельная тема "Расчет на прочность элементов обшивки дырчатых вальцев". Результаты исследований по теме были защищены на Научно-техническом совете института. По этим результатам была опубликована моя первая научная статья [3].

В качестве расчетной схемы рассматривалась жестко защемленная по краям прямоугольная в плане открытая цилиндрическая оболочка (криволинейная пластина), регулярно перфорированная круговыми отверстиями. Применялась комбинированная методика: сначала определялось напряженно-деформированное состояние (НДС) в соответствующей сплошной пластине, а затем вносились поправки на напряжения от перфорации по методике близкой к предложенной в работе [4]. Формально процесс Ритца записывался с применением двойных функциональных рядов для перемещений, но на практике использовались лишь первые члены этих рядов из-за отсутствия сколько-нибудь серьезной вычислительной техники. Со сказанным связана и достаточно глубокая аналитическая проработка процесса построения решения.

"Изюминку" статьи составлял эксперимент, методика которого полностью принадлежит мне. Рассматривалась цилиндрическая пластина радиусом $R = 359\text{мм}$, толщиной $h = 14\text{мм}$ и размерами в развертке $a = 220\text{мм}$, $b = 140\text{мм}$. В центре пластины, защемленной по краям и лежащей жесткой раме, прикладывалась нормальная нагрузка, распределенная по кругу радиусом 11мм . Напряжения замерялись датчиками сопротивления на бумажной основе с базой 10мм .

Лабораторные испытания состояли из двух этапов:

1. На сплошной пластине наносились очертания предполагаемого расположения отверстий, и датчики наклеивались в восьми точках так, как показано на рис.1а,б. Пластина нагружалась в пределах упругих деформаций с интервалами в 400кГ ($Q_{min} = 600\text{кГ}$, $Q_{max} = 4200\text{кГ}$).

2. Не снимая датчики и не изменяя условий закрепления пластины, в ней (в замедленном темпе во избежание температурных воздействий на датчики) просверливались отверстия и повторялся процесс нагружения.

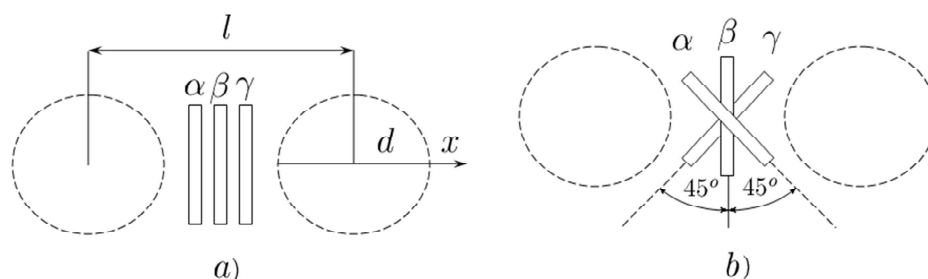


Рис. 1

Теоретический коэффициент ослабления пластины за счет перфорации, вычислялся по формуле $K^T = l/(l - d)$ (см. рис. 1, а), и при $l = 36\text{мм}$, $d = 16\text{мм}$ был равен $K^T = 1.9$. Максимальный экспериментальный коэффициент ослабления при $Q = 4200\text{кГ}$ оказался равным $K_{max}^{\ominus} = 2.89$, в то время, как средний коэффициент — $K_{cp}^{\ominus} = 2.19$

На конечном результате сказались многие факторы от неточности решения для сплошной пластины и примитивности методики вычисления коэффициента ослабления до погрешности тензометрирования. Кстати с этой задачей связано мое заочное знакомство с В.В.Новожиловым, о чем я уже писал в воспоминаниях [5]: "Мне доверили, как потом оказалось, гробовую задачу о действии сосредоточенной силы на цилиндрическую регулярно перфорированную жестко заземленную пластину. Я об этой задаче поведал своему приятелю Игорю Антонову, сыну известного кораблестроителя Н.И. Антонова, главного конструктора первой титановой подлодки. Игорь был запросто вхож к академику. Когда он рассказал В.В. о моей задаче, то получил краткую отповедь:

– Он эту задачу не решит никогда".

Это так. И тем не менее была выполнена законченная работа, которую можно было бы повторить и теперь с использованием современной вычислительной техники и усовершенствованных за полвека средств тензометрирования.

Во ВНИИСтроммаш'е мною получен еще один полезный опыт - отстаивать свою правоту как прочниста не в простом споре, а на уровне судебного разбирательства. Дело в том, что в Томске в 1963 году взорвался автоклав АП12 3.6×27 (автоклав проходной, рабочее давление 12 атмосфер, диаметр 3.6м, длина 27м). Погибли восемь рабочих. Специальная комиссия ЦК партии должна была найти виновника между ВНИИСтроммаш'ем, проектировавшим автоклав, и Ижорским заво-

дом, изготовившим этот взрывоопасный сосуд давления. "Специалист" по автоклавам Искалиев самоустранился от разбирательства причин аварии и меня назначили консультантом главного инженера по вопросам прочности. В центре внимания оказалось байонетное (затворное) кольцо, найденное в полусотне-сотне метров от цеха автоклавов искажённым и надорванным. По предписанию проектировщиков кольцо следовало изготавливать путем литья как единое целое. Однако изготавливать "деталь" диаметром 3.6 м с площадью поперечного сечения, сравнимой с площадью строительного кирпича – задача архисложная. Поэтому ижорцы выступили с предложением отливать четверти кольца, а полное кольцо получать путем сварки этих четвертей. Проектировщики не возражали против такой технологии "при условии сохранения равнопрочности". Однако при сварке имел место "непровар", что не отрицалось и ижорцами. Но они утверждали, что это не сказывается на прочности кольца. По их мнению, кольцо вообще можно заменить струбцинами (прищепками). И в этом была их роковая ошибка. Байонетное кольцо по сути является т.н. "очень короткой" осесимметрично деформируемой цилиндрической оболочкой, растягиваемой вдоль образующей и нагруженной по краям изгибающими моментами, как показано на рис.2.

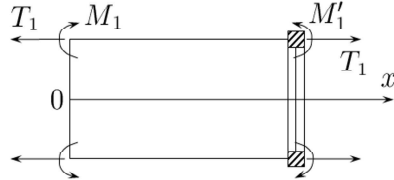


Рис. 2

Нетрудно убедиться, что в такой оболочке при $x = 0$ появляются напряжения, которые (без детализации) определяются формулами

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1), \quad \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0.$$

"Когда автоклавное разбирательство поутихло, главным специалистом по расчету автоклавов снова стал К.З.Искалиев. Я как-то ему рассказал об упомянутой методике оценки напряжений, на что он, аккуратно выговаривая слова, с достоинством заметил:

- Я бы не так сделал этот расчет.
- А как?
- Более точно.

Но и автора судьба не обделила автоклавами. Через двадцать лет они его "отыскали" в Сыктывкарском университете ... " [6].

К концу второго года работы во ВНИИСтроммаш'е мне представилась возможность поступить в очную целевую аспирантуру Ленинградского университета. Естественно, я обратился к К.Ф.Черныху. Он заявил, что имеет полный комплект аспирантов, но готов взять меня сверхнормы, если я соглашусь быть, не больше - не меньше, как от-

ветственным редактором его глав в справочнике "Прочность, устойчивость, колебания". Возможно, он имел в виду "техническим редактором", но сказано было именно так. Справочник должен был вобрать в себя основные отечественные достижения в механике деформируемого твердого тела за 50 лет Советской власти. Отсылая за подробностями к работе [6], перечислю основные полученные мною результаты. Уезжая в командировку, К.Ф. поручил мне написать главу о цилиндрической оболочке, структуру которой (главы) можно было бы распространить на оболочки вращения иных канонических очертаний (конические, сферические, тороидальные). При этом следовало ограничиться рассмотрением лишь осесимметричной и обратносимметричной деформаций с использованием метода расчленения НДС на основное (безмоментное и/или термоупругое) и простой краевой эффект (по терминологии А.Л.Гольденвейзера). Последний, ПКЭ, содержит в случае короткой оболочки четыре произвольных постоянных, для определения которых необходимо было решать систему из четырех алгебраических уравнений [7–9]. В справочном пособии [10] для случая осесимметричного деформирования цилиндрической оболочки вместо функций $e^{\pm\beta} \sin \beta$, $e^{\pm\beta} \cos \beta$ использовались их линейные комбинации в виде т.н. функций А.Н.Крылова. Это позволило авторам работы [10] выписать решения для целой совокупности краевых задач в общем виде (метод начальных параметров). Мною дано обобщение этого приема на осесимметричную и обратносимметричную деформации произвольной оболочки вращения положительной кривизны в рамках т.н. геккелерова приближения ($1 \pm \alpha \sqrt{h/R} \approx 1$, $\alpha \sim 1$) [11]. В результате в главе 21 первого тома справочника [12] были выписаны в общем виде решения типовых задач для названных видов деформации.

В работе [11] также показано, что перемещение и угол поворота незакрепленного края консольной оболочки вращения (рис.4), закрытого жесткой диафрагмой, определяется основным напряженным состоянием. Ранее в работе [9] эта задача решалась с учетом ПКЭ. Когда я впервые получил названный результат и передал выполненные выкладки К.Ф., при очередной встрече он мне признался: "Знаешь, вчера полдня разбирался с твоим решением. Сначала думал, что это ерунда какая-то. А когда разобрался, даже зауважал тебя ..." [6]

В результате предложенная мною структура главы для цилиндрической оболочки была полностью одобрена и по её образцу К.Ф. предложил В.М.Малькову написать главу для конической оболочки, а В.И.Кругляковой – для сферической. При этом кроме использования метода начальных параметров на основе функций Крылова было пред-

ложено привести в названных главах примеры решения задач с жестко перемещающимся краем.

Наиболее продуктивной для меня была работа над главой "Составные оболочки вращения" (первая глава II тома), восемьдесят процентов материала которой подготовлено мною. Правда, теоретического вклада здесь нет, однако конечные формулы получены путем решения в общем случае системы из четырех линейных алгебраических уравнений с использованием оценки слагаемых по критерию геккелерова приближения и пренебрежения несущественными. Например, задача об осесимметричной и обратносимметричной деформациях конструкции в виде двух произвольных оболочек вращения, сопряженных через кольцо жесткости. Надо сказать, что этой главой мы значительно превысили лимит по выделенному листажу, однако неиспользованными остались материалы еще на такую же главу (~ 40 стр.). Были планы издать книгу в виде справочного пособия по расчету осесимметрично и обратносимметрично деформируемых оболочек вращения на основании глав К.Ф. из обсуждаемого справочника с добавлением оставшихся неиспользованными материалов по составным оболочкам. Но этим планам не суждено было сбыться...

Иногда материал в главу подавался, что называется, "с колес". Помню, как-то к нам приехал производственник за консультацией по вопросу оценки напряжений в сварном шве, если произошло некоторое (малое) смещение одной цилиндрической трубы относительно другой. Почти в режиме реального времени появился раздел "Влияние несоосности и различия в диаметрах составных оболочек".

У этой задачи появилось продолжение... Секретарь парткома ВНИИ-Стромаш'а В.К.Козлов, живший в Гатчине со мной на одной площадке, как-то предложил мне написать какую-нибудь статью для "Трудов института", а он, мол, поспособствует, чтобы мне в виде исключения выдали гонорар. И у меня появилась идея рассмотреть задачу о деформировании фланцевого края автоклава при наличии малого сдвига его крышки. Против публикации статьи резко выступил Искалиев, вымучивавший автоклавную тематику на предмет изыскания кандидатской степени. Однако Козлов настоял и статья была опубликована [14]. Больше того, она фигурирует в списке литературы к главе 22 первого тома справочника наряду со статьей [11]...

Наконец, рукопись была передана в издательство "Машиностроение". "Пришло время править верстку. Писавшие знают, как тяжело общаться с издательствами. После нескольких сеансов заочного общения "Машиностроение" затребовало представителя для очных разбира-

тельств. Разумеется в Москву отправили меня. Провел я там (по памяти) недели две и изнутри увидел работу этого крупнейшего в свое время издательства. На 1-й Басманный переулок, 3, где располагался главный офис, ходил как на работу - с утра до вечера." [6]

Справочник вышел в свет в 1968 году тиражом в 40000 экземпляров. На первых страницах глав 22-й первого тома и 1-й – второго тома имеются сноски "Глава написана при участии Е.И.Михайловского". Сначала значилось "совместно", а "при участии" появилось из-за условий договора о гонораре. К.Ф. подарил мне (как и другим помощникам) трехтомник с соответствующими сопроводительными надписями. Так на втором томе он написал: "Дорогому Жене в память о плодотворном содружестве". Много лет спустя в последние месяцы жизни он напишет: "Безусловно в этой громоздкой работе (над справочником - Е.И.М.) мне помогали мои ученики и сотрудники. Так на этой работе "вырос" мой лучший ученик Евгений Ильич Михайловский ..." [13]

Во время учебы в аспирантуре я получил и первый опыт выполнения хоздоговорных работ. Так по договору с ЦКТИ (Центральный котлотурбинный институт им. И.И.Ползунова) мы с К.Р. Кенком, поступившим в аспирантуру после окончания какого-то вуза в Таллинне, рассчитывали термоупругое НДС в корпусе винтового компрессора. Последний в расчетном отношении представляет собой составную конструкцию из двух незамкнутых в окружном направлении цилиндрических оболочек разного диаметра, сопряженных по образующим. Предполагается, что оболочки имеют одинаковую толщину, а конструкция помещена в стационарное температурное поле, линейно меняющееся по области срединной поверхности. Особенность задачи в том, что она полностью решается в рамках комплексного метода [15], который был предметом докторской диссертации В.В.Новожилова. "В те годы время от времени раздавалась критика в адрес комплексного метода В.В.Новожилова. Одним из аргументов у критиков этого метода было утверждение, что все преимущества, которые он дает за счет интегрирования уравнений четвертого порядка вместо восьмого, теряются на этапе удовлетворения вещественным граничным условиям" [5]. К.Ф.Черных показал, что граничные условия шарнирного опирания и сопряжения оболочек одинаковой толщины, как плавного, так и под углом, записываются в терминах комплексных усилий В.В.Новожилова. Все названные условия как раз и подлежат выполнению в задаче о винтовом компрессоре, которую мы решили в первом приближении и позднее по инициативе заказчика опубликовали [16]. Еще позже мы вернулись к этой задаче и получили второе приближение [17], которое было мною включено в моногра-

фию [18], именно как пример получения полного решения в терминах комплексных усилий.

Другой договор был с одним из НИИ, связанным с разработкой авиационных технологий. По результатам исследований была опубликована статья [19], название которой можно рассматривать как краткую аннотацию.

3.1. Деформационные граничные величины Черныха-Михайловского

Свяжем с граничным контуром $\partial\Omega$ правую тройку ортов $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \boldsymbol{\nu}\}$, где \mathbf{t} – орт касательной к контуру, \mathbf{n} – орт нормали к срединной поверхности вдоль контура, $\boldsymbol{\nu}$ – орт тангенциальной нормали к линии $\partial\Omega$. Введем вектор перемещений точек контура $\partial\Omega$ и вектор углов поворота граничного нормального элемента $ds_t \times h$ по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= u_\nu \boldsymbol{\nu} + u_t \mathbf{t} + w \mathbf{n}, \\ \boldsymbol{\omega}_t &= -\vartheta_t \boldsymbol{\nu} + \vartheta_\nu \mathbf{t} + \omega_{tt} \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где

$$\begin{aligned} \vartheta_t &= -\frac{dw}{ds_t} - \sigma_t u_t + \tau_t u_\nu, \\ \vartheta_\nu &= -\frac{dw}{ds_\nu} - \sigma_\nu u_\nu + \tau_\nu u_t, \\ \omega_{tt} &= -\frac{du_\nu}{ds_t} + \rho_t u_t - \tau_t w. \end{aligned} \quad (1.1')$$

Используя правила дифференцирования ортов, получим

$$\frac{d}{ds_t} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu} \\ \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \rho_t & -\tau_t \\ -\rho_t & 0 & \sigma_t \\ \tau_t & -\sigma_t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu} \\ \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{ds_t} &= \varepsilon_{tt} \mathbf{t} + \boldsymbol{\omega}_t \times \mathbf{t}, \\ \boldsymbol{\kappa}_t &= \frac{d\boldsymbol{\omega}_t}{ds_t} = -\varkappa_{tt} \boldsymbol{\nu} + \varkappa_{t\nu} \mathbf{t} - \varkappa_{tn} \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где

$$\begin{aligned}
\kappa_{tt} &= \frac{d\vartheta_t}{ds_t} + \rho_t \vartheta_\nu - \tau_t \omega_{tt}, \\
\kappa_{t\nu} &= \frac{d\vartheta_\nu}{ds_t} - \rho_t \vartheta_t - \sigma_t \omega_{tt}, \\
-\kappa_{tn} &= \frac{d\omega_{tt}}{ds_t} + \sigma_t \vartheta_\nu + \tau_t \vartheta_t, \\
\varepsilon_{tt} &= \frac{du_t}{ds_t} - \rho_t u_\nu - \sigma_t w.
\end{aligned} \tag{1.3'}$$

На основании соотношений (1.3) имеют место следующие формулы (аналогичные формулам Чезаро в линейной теории упругости):

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_t &= \boldsymbol{\omega}_0 + \int_{S_0}^{S_t} \boldsymbol{\kappa}'_t ds'_t, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \\
&+ \int_{S_0}^{S_t} \left(\varepsilon_{tt} \mathbf{t} - \mathbf{t} \times \int_{S_0}^{S_t} \boldsymbol{\kappa}'_t ds'_t \right)' ds'_t.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Наряду со статическими кирхгофовскими величинами \mathbf{Q}_ν , $M_{\nu\nu}$ введем главный вектор \mathbf{F} и главный момент (относительно текущей точки контура $\partial\Omega$) \mathbf{B} этих величин (рис.3)

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \mathbf{F}_0 + \int_{S_0}^{S_t} \mathbf{Q}'_\nu ds'_t, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{F}_0 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \\
&+ \int_{S_0}^{S_t} [M'_{\nu\nu} \mathbf{t}' - \mathbf{Q}_\nu \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] ds'_t = \\
&= \mathbf{B}_0 + \int_{S_0}^{S_t} (M_{\nu\nu} \mathbf{t} + \mathbf{F} \times \mathbf{t})' ds'_t.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Теорема Клапейрона может быть представлена формулой

$$U = \frac{1}{2} L_\Omega + \frac{1}{2} L_{\partial\Omega}, \tag{1.6}$$

где U — упругая энергия деформации:

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2} c_0 \int_\Omega \varepsilon^\oplus C_1 \varepsilon d\Omega + \frac{1}{2} d_0 \int_\Omega \boldsymbol{\kappa}^\oplus C_1 \boldsymbol{\kappa} d\Omega = \\
&= \frac{1}{2c_0} \int_\Omega t^\oplus C_2 t d\Omega + \frac{1}{2d_0} \int_\Omega m^\oplus C_2 m d\Omega,
\end{aligned} \tag{1.7}$$

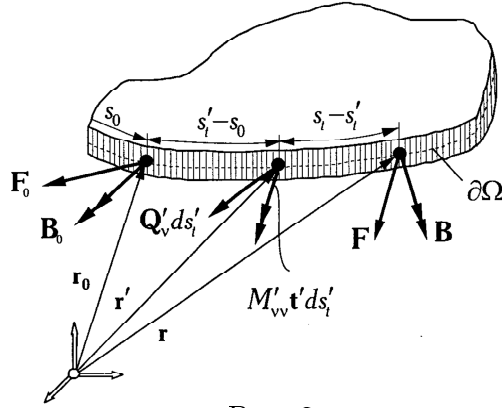


Рис. 3

C_1, C_2 — известные положительно определенные матрицы;
 L_Ω — работа внешних поверхностных сил:

$$L_\Omega = \int_{\Omega} p^{\oplus} u d\Omega; \quad (1.8)$$

$L_{\partial\Omega}$ — работа краевых сил:

$$L_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{Q}_\nu \cdot \mathbf{u} + M_{\nu\nu} \vartheta_\nu) ds_t \equiv \int_{\partial\Omega} \partial q^{\oplus} \partial u ds_t. \quad (1.9)$$

Последнюю формулу в случае однозначных перемещений можно преобразовать к виду

$$L_{\partial\Omega} = \mathcal{F} \cdot \mathbf{u}(s_0) + \mathcal{B}(s_0) \cdot \boldsymbol{\omega}_t(s_0) - \oint_{\partial\Omega} \partial b^{\oplus} \partial \chi ds_t, \quad (1.10)$$

где

$$\mathcal{F} = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{Q}_\nu ds_t, \quad \mathcal{B}(s_0) = \oint_{\partial\Omega} M_{\nu\nu} \mathbf{t} ds_t + \int_{s_0+0}^{s_0-0} \mathbf{F} \times \mathbf{t} ds_t. \quad (1.10')$$

Деформационные граничные величины (ДГВ) $\partial \chi$, впервые введенные в работе [20] по формулам (1.3), (1.3'), а затем — в работе [21] по формуле (1.10) без учета внеинтегральных слагаемых, являются в случае односвязной области Ω альтернативным вариантом обобщенных перемещений по отношению к традиционным (кирхгофовским) граничным величинам. Прилагательное "деформационные" в названии обсуждаемых величин связано с тем, что они выражаются через компоненты

деформации, а значит, посредством закона Гука – через усилия и моменты. Следует отметить, что геометрические граничные величины, выражающиеся через "усилия-моменты", впервые получены в работе [22] для нелинейной теории оболочек. Однако там они выведены путем искусственных построений, и им не поставлены в соответствие статические величины. Иными словами, комбинации граничных величин, полученные в работе [22], не являются фундаментальными и поэтому не получили широкого практического применения.

Допустим, что одним и тем же граничным условиям и поверхностной нагрузке отвечают два решения \mathbf{u}' , \mathbf{u}'' некоторой краевой задачи. Применяя к разности этих решений $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{u}' - \mathbf{u}''$ теорему Клапейрона, получим

$$c_0 \int_{\Omega} \varepsilon^{\oplus} C_1 \dot{\varepsilon} d\Omega + d_0 \int_{\Omega} \varkappa^{\oplus} C_1 \dot{\varkappa} d\Omega = \dot{L}_{\partial\Omega}. \quad (1.11)$$

Если $\dot{L}_{\partial\Omega} = 0$, то (в силу неотрицательности подинтегральных выражений в левой части равенства (1.11)) $\dot{\varepsilon} = 0$, $\dot{\varkappa} = 0$, что возможно лишь при перемещении оболочки как твердого тела. Таким образом, из соотношения (1.11) следует, что задание четырех деформационных величин, вообще говоря, не обеспечивает единственность решения линейной краевой задачи механики оболочек. Чтобы убедиться в этом достаточно рассмотреть консольную оболочку вращения, жестко защемленную на неподвижном крае ($\partial\Omega_1$) и подкрепленную на подвижном крае ($\partial\Omega_2$) "абсолютно" жесткой диафрагмой, к которой приложены сила $\mathcal{F}_y = P$ и момент $\mathcal{B}_x = -M$ (рис. 4). Если не учитывать внеинтегральные слагаемые, то при отсутствии поверхностной нагрузки из условий $\partial u|_{\partial\Omega_1} = 0$, $\partial \varkappa|_{\partial\Omega_2} = 0$ и теоремы Клапейрона следует, что в рассматриваемой оболочке отсутствует напряженно-деформированное состояние независимо от значений P и M , что абсурдно. Из сказанного следует, что при формулировании граничных условий на контуре многосвязной области Ω необходимо принимать во внимание внеинтегральные слагаемые в формуле (1.10). Например, граничные условия для жесткого подвижного края $\partial\Omega_i$ многосвязной области Ω при использовании ДГВ следует записывать так:

$$\varkappa_{tt}^i = \varkappa_{tv}^i = \varkappa_{tn}^i = 0, \quad \varepsilon_{tt}^i = 0, \quad \mathcal{F}^i = \mathbf{P}^i, \quad \mathcal{B}^i = \mathbf{M}^i. \quad (1.12)$$

Переопределенность в этих граничных условиях (десять вместо четырех) является кажущейся, так как в системе (1.12) имеются зависимые уравнения, вытекающие из следующих условий однозначности переме-

щений и углов поворота на контуре $\partial\Omega_i$:

$$\mathbf{u}^i \triangleq \oint_{\partial\Omega_i} (\varepsilon_{tt} \mathbf{t} - \boldsymbol{\omega}_t \times \mathbf{t}) ds_t = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\omega}^i \triangleq \oint_{\partial\Omega_i} \boldsymbol{\kappa}_t ds_t = \mathbf{0}, \quad (1.13)$$

где $\mathbf{u}^i, \boldsymbol{\omega}^i$ – параметры дислокации по Ляву [23].

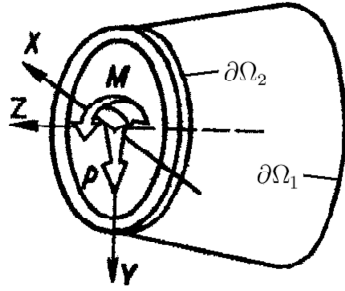


Рис. 4

Если оболочка работает как консоль (см. рис.4), то следует дополнительно задавать два статических условия [18].

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_y &= \pi r(Q_{r,1} - Q_{\varphi,1}) \equiv \pi r(T_{1,1}^* \cos \varphi - S_{,1}^*) = P, \\ \mathcal{B}_x &= \pi r(M_{1,1} + rQ_{r,1}) \equiv \pi r^2 T_{1,1}^* \sin \varphi = -M \end{aligned} \quad (1.14)$$

(знаком (*) помечены безмоментные усилия).

Таким образом, общее число граничных условий на жестком подвижном крае равно четырем.

Распространение ДГВ на случай многосвязной области выполнено мною уже в период работы в Сыктывкарском университете и опубликовано в статье [24], в которой я посчитал своим долгом взять в соавторы К.Ф.Черныха, как прародителя этой своеобразной "визитной карточки" лаборатории теории оболочек Ленинградского университета. Сказанным оправдывается название данного подраздела.

3.2. Замечательные свойства простого краевого эффекта

Подставив в выражение (1.9) вытекающее из (1.3') соотношения

$$\begin{aligned} w &= R_t(\varepsilon_{tt} - \frac{du_t}{ds_t} - \rho_t u_\nu), \\ \vartheta_\nu &= R_t(\boldsymbol{\kappa}_{tn} + \frac{d\boldsymbol{\omega}_{tt}}{ds_t} + \tau_t \vartheta_t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

в результате интегрирования по частям, получим

$$L_{\partial\Omega} = \oint_{\partial\Omega} \{Q_{\nu\nu}^{\vee} u_{\nu} + Q_{\nu t}^{\vee} u_t + Q_{\nu n}^{\vee} (R_t \varepsilon_{tt}) + M_{\nu\nu} (R_t \varkappa_{tn})\} ds_t,$$

где

$$\begin{aligned} Q_{\nu\nu}^{\vee}(\bar{u}_{\nu}, \bar{u}_t) &= Q_{\nu\nu} - \rho_t R_t Q_{\nu n}^{\vee} - \frac{d^2 R_t M_{\nu\nu}}{ds_t^2} + \tau_t^2 R_t M_{\nu\nu}, \\ Q_{\nu t}^{\vee}(\bar{u}_{\nu}, \bar{u}_t) &= Q_{\nu t} + \frac{dR_t Q_{\nu n}^{\vee}}{ds_t} - \rho_t \frac{dR_t M_{\nu\nu}}{ds_t} + \tau_t M_{\nu\nu}, \\ Q_{\nu n}^{\vee}(\bar{u}_{\nu}, \bar{u}_t, \bar{w}, \bar{\vartheta}_{\nu}) &= Q_{\nu n} + \frac{d}{ds_t} (\tau_t R_t M_{\nu\nu}) + \tau_t \frac{dR_t M_{\nu\nu}}{ds_t}; \end{aligned} \quad (2.2)$$

$\bar{u}_{\nu}, \bar{u}_t, \bar{w}, \bar{\vartheta}_{\nu}$ – функции напряжения.

Таким образом, совокупность статических величин $\{Q_{\nu\nu}^{\vee}, Q_{\nu t}^{\vee}, Q_{\nu n}^{\vee}, M_{\nu\nu}\}$ можно рассматривать как систему обобщенных сил, которой отвечает система обобщенных перемещений $\{u_{\nu}, u_t, R_t \varepsilon_{tt}, R_t \varkappa_{tn}\}$. В силу статико-геометрической аналогии Лурье-Гольденвейзера, распространенной К.Ф.Черныхом на граничные величины [21], обобщенным статическим величинам отвечает система обобщенных перемещений

$$\{\varkappa_{tt}^{\vee}, \varkappa_{t\nu}^{\vee}, \varkappa_{tn}^{\vee}, \varepsilon_{tt}\},$$

где

$$\begin{aligned} \varkappa_{tt}^{\vee}(u_{\nu}, u_t) &= \varkappa_{tt} - \rho_t R_t \varkappa_{tn}^{\vee} + \frac{d^2 R_t \varepsilon_{tt}}{ds_t^2} - \tau_t^2 R_t \varepsilon_{tt}, \\ \varkappa_{t\nu}^{\vee}(u_{\nu}, u_t) &= \varkappa_{t\nu} - \frac{dR_t \varkappa_{tn}^{\vee}}{ds_t} - \rho_t \frac{dR_t \varepsilon_{tt}}{ds_t} + \tau_t \varepsilon_{tt}, \\ \varkappa_{tn}^{\vee}(u_{\nu}, u_t, w, \vartheta_{\nu}) &= \varkappa_{tn} - \frac{d}{ds_t} (\tau_t R_t \varepsilon_{tt}) - \tau_t \frac{dR_t \varepsilon_{tt}}{ds_t}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Используя соотношения (2.2), формулам (1.5) можно придать вид

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_0 - R_t Q_{\nu n}^{\vee} \mathbf{t} + \frac{dR_t M_{\nu\nu}}{ds_t} \boldsymbol{\nu} + \frac{R_t M_{\nu\nu}}{R_{\nu t}} \mathbf{n} + \int_{S_0}^{S_t} \mathbf{Q}_{\nu}^{\vee} ds'_t, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + R_t M_{\nu\nu} \mathbf{n} + \int_{S_0}^{S_t} \left(\int_{S_0}^{S'_t} \mathbf{Q}_{\nu}^{\vee} ds''_t \times \mathbf{t}' \right) ds'_t, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$\mathbf{Q}_{\nu}^{\vee} = Q_{\nu\nu}^{\vee} \boldsymbol{\nu} + Q_{\nu t}^{\vee} \mathbf{t}. \quad (2.4')$$

Соотношениям (2.4), (2.4') по статико-геометрической аналогии отвечают следующие (см. форм. (1.4)):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_t &= \boldsymbol{\omega}_0 + \frac{dR_t \varepsilon_{tt}}{ds_t} \boldsymbol{\nu} + R_t \varkappa_{tn}^\vee \mathbf{t} + \frac{R_t \varepsilon_{tt}}{R_{\nu t}} \mathbf{n} + \int_{S_0}^{S_t} \boldsymbol{\kappa}_t^{\vee'} ds_t', \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 + R_t \varepsilon_{tt} \mathbf{n} + \int_{S_0}^{S_t} \left(\int_{S_0}^{S_t'} \boldsymbol{\kappa}_t^{\vee''} ds_t'' \times \mathbf{t}' \right) ds_t',\end{aligned}\quad (2.5)$$

где

$$\boldsymbol{\kappa}_t^\vee = \varkappa_{tt}^\vee \boldsymbol{\nu} + \varkappa_{t\nu}^\vee \mathbf{t}. \quad (2.5')$$

Вблизи неасимптотического края ($\sigma_t \neq 0$) в непологий оболочке при плавных поверхностной и краевой нагрузках общее НДС можно представлять суммой основного состояния, плавно меняющегося по области Ω , и простого краевого эффекта. При этом имеют место соотношения

$$\begin{bmatrix} u_\nu^k \\ \bar{u}_\nu^k \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} u_t^k \\ \bar{u}_t^k \end{bmatrix} \sim \sqrt{\frac{h}{R_0}} \begin{bmatrix} w^k \\ \bar{w}^k \end{bmatrix} \sim \frac{h}{R_0} \begin{bmatrix} R_0 \vartheta_\nu^k \\ R_0 \bar{\vartheta}_\nu^k \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

где R_0 – характерный радиус или размер срединной поверхности оболочки; индексом $(^k)$ помечены слагаемые ПКЭ.

С учетом соотношений (2.6) на основании формул (2.2), (2.3), заключаем, что векторы $\boldsymbol{\kappa}_t^\vee$ и \mathbf{Q}_ν^\vee с обычной для теории оболочек точностью ($1 \pm \alpha h/R_0 \approx 1$, $\alpha \sim 1$) не зависят от ПКЭ, т.е. полностью определяются основным напряженным состоянием.

Обозначим через $\{\dots\}_{\partial\Omega}$ приращение величины, стоящей в скобках, при обходе контура $\partial\Omega$. Тогда на основании формул (2.4), (2.5) можно записать

$$\{\mathbf{F}\}_{\partial\Omega} = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{Q}_\nu^\vee ds_t, \quad \{\mathbf{B}\}_{\partial\Omega} = \oint_{\partial\Omega} \left(\int_{S_0}^{S_t} \mathbf{Q}_\nu^{\vee'} ds_t' \times \mathbf{t} \right) ds_t; \quad (2.7)_1$$

$$\{\boldsymbol{\omega}\}_{\partial\Omega} = \oint_{\partial\Omega} \boldsymbol{\kappa}_t^\vee ds_t, \quad \{\mathbf{u}\}_{\partial\Omega} = \oint_{\partial\Omega} \left(\int_{S_0}^{S_t} \boldsymbol{\kappa}_t^{\vee'} ds_t' \times \mathbf{t} \right) ds_t; \quad (2.7)_2$$

$$\boldsymbol{\omega}_0 = l_1(u_1, u_2) - \int_{S_0}^{S_t} \boldsymbol{\kappa}_t^{\vee'} ds_t',$$

$$\mathbf{u}_0 = l_2(u_1, u_2) - \int_{S_0}^{S_t} \left(\int_{S_0}^{S_t'} \boldsymbol{\kappa}_t^{\vee''} ds_t'' \times \mathbf{t}' \right) ds_t'. \quad (2.7)_3$$

Из соотношений (2.7) вытекают соответственно следующие свойства ПКЭ:

i) простому краевому эффекту отвечает самоуравновешенная на всяком замкнутом контуре краевая нагрузка;

ii) простой краевой эффект не вызывает дислокационных перемещений;

iii) жесткие перемещения контура многосвязной области определяются основным напряженным состоянием.

Свойство *i)* использовалось, например, в формулах (1.14). Свойство *iii)* было подмечено при решении конкретных задач для справочника [12]. Свойства *i)* и *iii)* легли в основу обобщения балочной теоремы Клапейрона о трех моментах на случай многоопорной неразрезной цилиндрической оболочки (горизонтальный автоклав, магистральный трубопровод) [26].

3.3. Расчленение граничных условий подкрепленного края

Пусть теперь неасимптотический край оболочки подкреплен тонким стержнем и при этом выполняются все условия расчленения напряженного состояния на основное (o) и простой краевой эффект (k). В силу соотношений (1.3'), (2.1), (2.6) имеют место приближенные равенства

$$\begin{aligned} \varkappa_{tt} &= \rho_t R_t \varkappa_{tn}^k + \varkappa_{tt}^o, \quad \varkappa_{tn} = \varkappa_{tn}^k + \varkappa_{tn}^o, \\ \varkappa_{tv} &= \frac{dR_t \varkappa_{tn}^k}{ds_t} + \varkappa_{tv}^o, \quad \varepsilon_{tt} = \varepsilon_{tt}^k + \varepsilon_{tt}^o, \\ B_\nu &= B_\nu^o, \quad B_n = B_n^o + R_t M_{\nu\nu}^k, \\ B_t &= B_t^o, \quad F_t = F_t^o - R_t Q_{\nu n}^k. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Простейший случай граничных условий на краю оболочки, подкрепленном тонким стержнем, имеет вид [27]

$$\begin{aligned} B_\nu &= -K_\nu \varkappa_{tt}, \quad B_t = K_t \varkappa_{tv}, \\ B_n &= -K_n \varkappa_{tn}, \quad F_t = C_t \varepsilon_{tt}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь K_ν – жесткость стержня при изгибе вокруг тангенциальной нормали, K_n – вокруг нормали к поверхности, K_t – жесткость стержня при кручении, C_t – жесткость при растяжении. Четыре параметра краевого эффекта \varkappa_{tn}^k , ε_{tt}^k , $M_{\nu\nu}^k$, $Q_{\nu n}^k$ на краю длинной оболочки связаны следующими условиями податливости:

$$\begin{aligned} R_t \varepsilon_{tt}^k &= \alpha_{11} Q_{\nu n}^k + \alpha_{12} M_{\nu\nu}^k, \\ R_t \varkappa_{tn}^k &= \alpha_{12} Q_{\nu n}^k + \alpha_{22} M_{\nu\nu}^k, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где α_{ij} - известные коэффициенты.

Подставляя соотношения (3.1) в граничные условия подкрепленного края (3.2), получим четыре уравнения относительно параметров краевого эффекта. Добавив к ним условия податливости (3.3), получим линейную систему шести уравнений относительно четырех неизвестных. Два условия совместности этой системы и являются граничными условиями для основного напряженного состояния.

"... накануне моей летней поездки домой, в Новороссийск, К.Ф. вручил мне экземпляр подготавливаемой к печати статьи со словами:

– Посмотри внимательно как это можно использовать для расчленения граничных условий на крае оболочки, подкрепленном тонким стержнем...

... оказавшись на берегу "самого синего в мире", я отрывал время от основных занятий, чтобы шаг за шагом выполнять выкладки для воспроизведения результатов, полученных К.Ф. И, в конце концов, сделал работу в рамках своей компетентности. Как водится, нашел ряд опечаток. И хотя никаких идей у меня при этом не появилось, я все же чувствовал себя достаточно уверенно перед разговором с К.Ф., имея на руках неопровержимые свидетельства своего прилежания. И ничего не предвещало грозу... Когда, возвратившись в Питер, я стал демонстрировать перед К.Ф. плоды трудов каторжных и смаковать выявленные опечатки, с ужасом обнаружил, что он прямо-таки раздувается от негодования. Особенно бесили его опечатки, которые мною то и дело бес тактно назывались ошибками. Наконец, он произнес характерным для таких случаев глухим голосом:

– Тебе что было предложено? Опечатки выискивать? Ведь я тебя просил подумать, как этим материалом можно воспользоваться.

Помолчав с минуту, я сделал попытку выбраться из пропасти:

– Основных параметров краевого эффекта четыре и граничных условий подкрепленного края тоже четыре. Но ведь есть еще два условия податливости края длинной оболочки, связывающие те же четыре параметра краевого эффекта. Итого, имеем шесть линейных уравнений относительно четырех параметров краевого эффекта. Условия совместности этих уравнений и являются основными граничными условиями подкрепленного края.

– ... Ну, вот и всё! А ты — опечатки-опечатки. Иди, оформляй диссертацию.

Я пошел и оформил." [6]

Перечислю некоторые результаты, с которыми у меня связаны приятные воспоминания.

1. Ф.Дишингером было подмечено, что результаты, полученные для оболочки вращения, иногда могут быть использованы на основе аффинного преобразования и для расчета по безмоментной теории овальных оболочек [28]. В то время метод расчленения НДС не был известен, поэтому аффинное преобразование применяли к задачам в основном декоративного характера. В кандидатской диссертации у меня в качестве примера рассматривался эллипсоидальный купол условно называемый нами "... куполом для стадиона Ленина (ныне стадион "Петровский"). Тогда как раз велись разговоры, что неплохо бы накрыть стадион куполом. Изюминкой задачи было то, что безмоментное напряженное состояние определялось методом аффинного преобразования, который очень нравился В.В. Новожилову. Так вот, года через три-четыре, когда я уже определенно нацелился на докторскую диссертацию, К.Ф. вдруг вспомнил, что во время моей защиты Валентин Валентинович, обратившись к нему, сказал:

– Что вы так затянули с защитой — ведь здесь две диссертации. Расчет купола, если его подробнее расписать, это тоже кандидатская диссертация.

Видимо, на моем лице что-то слишком явно отразилось, потому что К.Ф. тут же отреагировал:

– Но учти, что из двух даже самых больших верблюдов не сделаешь и одного маленького слона." [6]

2. В работе [20] введены в рассмотрение т.н. сопряженные задачи линейной теории оболочек, смысл которых заключается в следующем. Предположим найдено решение некоторой (первой) задачи $u^{(1)}$, $\bar{u}^{(1)}$. Этой задаче можно поставить в соответствие вторую задачу (сопряженную)

$$u^{(2)} = \bar{u}^{(1)}, \quad \bar{u}^{(2)} = u^{(1)}.$$

Как-то К.Ф. обратился ко мне, мол, попробуй "покрути" сопряженные задачи у него сложилось впечатление, что там есть еще не использованные возможности. Когда я ему показал свои результаты, он оценил: "Раскрутил все же". К.Ф., кстати, согласился с термином "ассоциированные задачи" вместо "сопряженные". Этот материал вошел в мою первую книгу [29], но меня он не впечатляет. Думаю его место в занимательной теории оболочек.

3. Важным считаю результат по выводу континуальных уравнений изгиба регулярных стержневых решеток. Например, такое уравнение

для плоской прямоугольной стержневой решетки имеет вид [30]

$$\frac{(EI)_1}{l_1} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left(\frac{(\mu I_t)_1}{l_1} + \frac{(\mu I_t)_2}{l_2} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{(EI)_2}{l_2} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q_n. \quad (3.4)$$

Здесь $(EI)_1$, $(EI)_2$ – жесткости при изгибе стержней, расположенных соответственно параллельно осям x и y ; $(\mu I_t)_1$, $(\mu I_t)_2$ – жесткости при кручении; l_1 , l_2 – расстояния между стержнями.

Уравнение (3.4) получено из уравнения конструктивно ортотропной пластины путем устремления к нулю цилиндрической жесткости собственно пластины. Традиционный подход к выводу конструктивно анизотропных оболочек и пластин заключается в замене рёбер их нормальными реакциями с последующим использованием геометрических условий сопряжения. Мною впервые кроме нормальных реакций учитывался реактивный крутящий момент, благодаря чему появилось слагаемое со смешанной производной.

4. В работе [31] показано, что уравнения неразрывности, выведенные А.Л. Гольденвейзером [32] из соотношений Гаусса и Петерсона-Кодацци, могут быть формально получены непосредственно из уравнений равновесия с учетом кинематических уравнений.

Литература

1. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений в тонкой оболочке, ослабленной каким-либо отверстием. Проблемы механики сплошной среды (сб. тр. посвящ. 70-летию акад. Н.И. Мусхелишвили). М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 338–358.
2. *Мак-Лаклан Н. В.* Теория и приложения функций Матье. М.: Мир, 1953.
3. *Михайловский Е. И.* Расчет криволинейных перфорированных пластин – элементов обшивки дырчатых вальцев // Труды института (ВНИИСтроммаш). 1964. Вып.4. С. 24–37.
4. *Доннел Л. Г., Лангер Р. Э.* Расчет перфорированных пластин // Труды американского общества инженеров-механиков. 1962. Вып.3.
5. *Михайловский Е. И.* Незатейливые воспоминания о В.В. – В кн.: Михайловский Е.И. Школа механики оболочек академика Новожилова. Сыктывкар: Изд-во Сыкт. ун-та, 2005. 172 с.

6. Михайловский Е. И. Встреча длиною в жизнь. – В кн.: Михайловский Е. И. Школа механики оболочек академика Новожилова. Сыктывкар: Изд-во Сыкт. ун-та, 2005. 172 с.
7. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: ГИТТЛ, 1953. 554 с.
8. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.
9. Черных К. Ф. Линейная теория тонких оболочек, ч. I. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1962. 274 с.
10. Биргер Н. А., Шорр Б. Ф., Шнейдерович Р. М. Расчет на прочность деталей машин. Справочное пособие. М.: Машиностроение, 1966. 616 с.
11. Михайловский Е. И. К расчету коротких оболочек вращения // Исслед. по упругости и пластичности. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1967. Сб. 6. С. 117–130.
12. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Под общей ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968.
13. Черных К. Ф. О себе (в жизни и науке) // Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела / Тр. научной школы акад. В. В. Новожилова. СПб.: СПбГУ, 2004. Вып. 8. С. 6–23.
14. Михайловский Е. И. К расчету элементов автоклава (определение напряжений) // Гатчина: Труды института (ВНИИСтроммаш), 1964. Вып. 7. С. 53–74.
15. Новожилов В. В. Новый метод расчета тонких оболочек // Изв. АН СССР. ОТН. 1946. № 1. С. 36–48.
16. Каплун Д. А., Михайловский Е. И., Черных К. Ф. Определение термоупругих напряжений и перемещений в корпусе винтового компрессора. – В сб. "Винтовые компрессоры в энергоманинотроении". Л.: Тр. ЦКТИ, 1975. Вып. 127. С. 74–81.

17. Михайловский Е. И., Михеев С. Г. Напряженно-деформированное состояние корпуса винтового компрессора // Вестник ЛГУ, серия математика, механика, астрономия. Деп. ВИНТИ. 1978. № 1345-78-Деп. 21 с.
18. Новожилков В. В., Черных К. Ф., Михайловский Е. И. Линейная теория тонких оболочек. Л.: Политехника, 1991. 656 с.
19. Ипатов С. Д., Михайловский Е. И. и Титов А. Г. Аналитическое определение изменения некруглости среза сопла камер сгорания от давления рабочих газов // Авиационная промышленность. 1971. № 12. С. 17–20.
20. Черных К. Ф. О сопряженных задачах теории оболочек // Докл. АН СССР. 1957. Т.117. № 6. С. 949–951.
21. Черных К. Ф. Линейная теория тонких оболочек, ч. II. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1962. 274 с.
22. Галимов К. З. О формулировке геометрических граничных условий нелинейной теории оболочек в усилиях-моментах // Изв. Казанского фил. АН СССР. Сер. физ.-мат. наук. 1958. Т. 12. С. 17–27.
23. Ляв А. Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ, Гостехиздат, 1935. 674 с.
24. Михайловский Е. И., Черных К. Ф. О некоторых особенностях деформационного варианта граничных величин // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 2. С. 155–162.
25. Михайловский Е. И., Черных К. Ф. Расчленение граничных условий в линейной теории оболочек (случай подкрепленного неасимптотического края). В сб.: Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды (к 60-летию акад. Л.И. Седова). М.: Наука, 1969. С. 321–326.
26. Михайловский Е. И., Никитенков В. Л. Аналог теоремы о трех моментах в теории оболочек // Прикладная механика. 1987. Т. 20. №7. С. 65 – 70.
27. Михайловский Е. И. Расчленение граничных условий на подкрепленном краю оболочки // Исслед. по упругости и пластичности. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1968. Сб.7. С. 13–27.

28. *Dischinger F.* Der Spannungszustand in affinen Schalen und Raumfachwerken unter Anwendung des statischen Massenausgleichs // Bauing. 136. Bd.17.
29. *Михайловский Е. И.* Прямые, обратные и оптимальные задачи для оболочек с подкрепленным краем. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986. 220 с.
30. *Михайловский Е. И.* Математические модели механики упругих тел. Сыктывкар: Изд-во Сыкт. ун-та, 2007. 516 с.
31. *Михайловский Е. И.* Классическая линейная теория оболочек // Вестн. Сыктывкарского ун-та. Сер.1.: Матем., Механ., Информ. 2006. Вып. 6. С. 123–164.
32. *Гольденвейзер А. Л.* Дополнения и поправки к теории тонких оболочек Love // Пластинки и оболочки. М.: Госстройиздат, 1939. С. 85–105

Summary

Mikhailovskii E. I. Mechanics of shells

The article can be viewed as memories for specialists on the mechanics of shells, and especially for graduate students who have chosen the mechanics of shells as an area of a dissertation interests. The article was planned for publication as a whole. In the process of writing the author decided to divide the article into two parts due to the large size of the article. The first part will published in this issue of "Vestnik". The article contains the main results of the author in the linear theory of shells and methods their receipt.

Сыктывкарский государственный университет

Поступила 01.05.2012