

УДК 539.3

К АНАЛИТИЧЕСКОМУ РЕШЕНИЮ ОДНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ¹

А. В. Ермоленко

Используя уравнения типа Кáрмана–Тимошенко–Нагди, приведенные к нижней лицевой поверхности, получено аналитическое решение для цилиндрически изгибаемой жестко закрепленной пластины и абсолютно твердого основания.

Ключевые слова: теория пластин, контактная задача, аналитическое решение.

1. Уравнения типа Кáрмана–Тимошенко–Нагди, приведенные к нижней лицевой поверхности

В работе [1] получены уравнения типа Кáрмана–Тимошенко–Нагди [2], приведенные к произвольной базовой поверхности.

Если в качестве базовой поверхности взять нижнюю лицевую поверхность, то уравнения изгиба плоских пластин принимают вид [1]

$$D\Delta^2 w = q_n - h_*^2 \Delta q_n + (I - h_\psi^2 \Delta)L(\Phi, w), \quad (1.1)_1$$

$$\frac{1}{Eh} \Delta^2 \Phi = \frac{\nu}{Eh} \Delta m_n - \frac{1}{2} L(w, w), \quad (1.1)_2$$

$$\psi_{1,1} + \psi_{2,2} = -\frac{1}{\mu h} (q_n + L(\Phi, w)). \quad (1.1)_3$$

Здесь h — толщина пластины до деформации, $q_n = q_n^+ - q_n^-$ — нормальная нагрузка; $m_n = hq_n^+$; E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона;

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, h_\psi^2 = h_*^2 = \frac{h^2}{6(1-\nu)}, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad (1.2)_1$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 годы, ГК № 02.740.11.0618.

$$L(\Phi, w) = \Phi_{,11}w_{,22} - 2\Phi_{,12}w_{,12} + \Phi_{,22}w_{,11}; \quad (1.2)_2$$

$$\Delta w = w_{,11} + w_{,22}, w_{,i} \triangleq \frac{\partial w}{\partial x_i}.$$

В уравнениях (1.1) неизвестные функции w (прогиб), Φ (функция напряжения), ψ_i , $i = 1, 2$ (поперечные сдвиги) являются функциями нижней лицевой плоскости.

2. Аналитическое решение для цилиндрически изгибаемой пластины и жесткого основания

Пусть прямоугольная пластина, расположенная параллельно абсолютно жесткому идеально гладкому основанию с зазором $\Delta \ll h$, находится под действием равномерной нормальной нагрузки $q_n^+ = q_0 = \text{const}$. Предполагаем, что краями $x_1 = 0$ и $x_1 = 2l$ пластина шарнирно оперта, а два других ее края бесконечно удалены или загружены (подкреплены) так, что реализуется цилиндрический изгиб. Считаем, что пластина выстилается по основанию, образуя непрерывную область контакта $(x_0, 2l - x_0)$. Учитывая одномерность задачи, будем указывать лишь одну координату $x \equiv x_1$.

Уравнения типа Кáрман–Тимошенко–Нагди (1.1) в случае цилиндрического изгиба принимают вид

$$w^{IV} = p_n - h_\psi^2 p_n'', \quad (2.1)_1$$

$$\psi_1' = -h_\psi^2 p_n. \quad (2.1)_2$$

$$\Phi^{IV} = \nu m_n'', \quad (2.1)_3$$

где $p_n = q_n/D$.

Граничные условия жестко закрепленного края с учетом симметричности задачи относительно $x = l$ выражаются равенствами

$$w = 0, -w' + \psi_1 = 0, \Phi = 0, \Phi' = 0 \text{ при } x = 0, \quad (2.2)_1$$

$$w' = 0, -w''' = 0, \Phi' = 0, \Phi''' = 0, \psi_1 = 0 \text{ при } x = l. \quad (2.2)_2$$

Краевые задачи для определения w и ψ_1 не зависят от краевой задачи на Φ , поэтому ограничимся только решением краевой задачи относительно прогиба и поперечных сдвигов.

Для того чтобы граничные условия на функцию w стали однородными, сделаем замену

$$w = \tilde{w} + \frac{\psi(0)}{2l}(2lx - x^2). \quad (2.3)$$

С учетом замены (2.3) получаем следующую краевую задачу относительно \tilde{w} :

$$\tilde{w}^{IV} = p_n - h_\psi^2 p_n'', \quad (2.4)_1$$

$$\tilde{w}(0) = 0, \tilde{w}'(0) = 0, \tilde{w}'(l) = 0, \tilde{w}'''(l) = 0. \quad (2.4)_2$$

На участке выстилания $[x_0, l]$ будем требовать выполнение условий:
i) выстилания

$$w(x) = \Delta \text{ при } x \in [x_0, l]; \quad (2.5)$$

ii) отсутствия излома нижней лицевой поверхности при $x = x_0$

$$w'(x_0 - 0) = 0; \quad (2.6)$$

iii) сопряжения по нижней лицевой поверхности частей пластины

$$w(x_0 - 0) = w(x_0 + 0),$$

$$-w'(x_0 - 0) + \psi_1(x_0 - 0) = -w'(x_0 + 0) + \psi_1(x_0 + 0). \quad (2.7)$$

Учитывая условие (2.5) и выражение (2.3), на отрезке $[x_0, l]$ функция \tilde{w} имеет вид

$$\tilde{w} = \Delta - \frac{\psi(0)}{2l}(2lx - x^2). \quad (2.8)$$

Подставляя выражение (2.8) в уравнение (2.4)₁, получим следующее дифференциальное уравнение:

$$p_n - h_\psi^2 p_n'' = 0,$$

решение которого с учетом симметрии имеет вид

$$p_n(x) = c_1 \operatorname{ch} \frac{x-l}{h_\psi}. \quad (2.9)$$

Учитывая теперь, что на лицевые поверхности пластины действует активная нагрузка $p_0 = q_n^+/D$ и реакция основания $r(x) = q_n^-(x)/D$, из (2.9) получим следующее выражение для реакции основания в области контакта:

$$r(x) = p_0 - c_1 \operatorname{ch} \frac{x-l}{h_\psi}. \quad (2.10)$$

На основе (2.10) общее выражение для контактной реакции имеет вид

$$r(x) = R\delta(x - x_0) + \left(p_0 - c_1 \operatorname{ch} \frac{x-l}{h_\psi}\right)H(x - x_0). \quad (2.11)$$

Здесь $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, $H(x)$ — функция Хевисайда, R — возможная сосредоточенная контактная реакция.

Функция Грина для краевой задачи (2.4) имеет вид

$$G(x, \xi) = \frac{1}{6}(x - \xi)^3 H(x - \xi) + \frac{2l\xi - \xi^2}{4l}x^2 - \frac{x^3}{6}. \quad (2.12)$$

Используя функцию Грина (2.12) и выражение (2.11), решение задачи (2.4) можно записать так:

$$\begin{aligned} \tilde{w}(x) = & \left(-\frac{p_0}{24}(x - x_0)^2 + \frac{h_\psi^2}{2}p_0 - \frac{c_1 h_\psi}{6}(x - x_0) \operatorname{sh} \frac{x_0 - l}{h_\psi} - \right. \\ & \left. - \frac{c_1 h_\psi^2}{2} \operatorname{ch} \frac{x_0 - l}{h_\psi} \right) (x - x_0)^2 H(x - x_0) + R \left[(h_\psi^2(x - x_0) - \frac{1}{6}(x - x_0)^3) H(x - x_0) + \right. \\ & \left. + \frac{x^3}{6} - h_\psi^2 \frac{x^2}{2l} - \frac{2lx_0 - x_0^2}{4l}x^2 \right] + p_0 \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x_0 x^3}{6} + \frac{3lx_0^2 - x_0^3}{12l}x^2 - h_\psi^2 \frac{x_0 - l}{2l}x^2 \right) + \\ & + c_1 \left(h_\psi^2 \frac{l - x_0}{2l} \operatorname{ch} \frac{x_0 - l}{h_\psi} x^2 - h_\psi \frac{2lx_0 - x_0^2}{4l} \operatorname{sh} \frac{x_0 - l}{h_\psi} x^2 + \right. \\ & \left. + h_\psi \operatorname{sh} \frac{x_0 - l}{h_\psi} \frac{x^3}{6} \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Интегрируя уравнение (2.1)₂ с учетом выражения (2.11) и условия симметрии, получим следующее выражение для поперечных сдвигов:

$$\begin{aligned} \psi_1(x) = & h_\psi^2 p_0 (x - x_0) H(x_0 - x) + h_\psi^2 R H(x - x_0) - \\ & - h_\psi^3 c_1 \operatorname{sh} \frac{x - l}{h_\psi} H(x - x_0) - h_\psi^3 c_1 \operatorname{sh} \frac{x_0 - l}{h_\psi} H(x_0 - x). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Используя выражения (2.13), (2.14), получаем, что условия (2.7) выполняются, если

$$R = 0. \quad (2.15)$$

Подставляя далее выражение (2.13) в условие (2.5) с учетом замены (2.8), учитывая (2.15) и приравнивая коэффициенты слева и справа при одинаковых степенях x , получим следующие уравнения относительно x_0, c_1 :

$$-\frac{p_0}{24}x_0^4 + \frac{h_\psi^2}{2}p_0x_0^2 + \frac{c_1 h_\psi}{6}x_0^3 \operatorname{sh} \frac{x_0 - l}{h_\psi} - \frac{c_1 h_\psi^2}{2}x_0^2 \operatorname{ch} \frac{x_0 - l}{h_\psi} = \Delta,$$

$$\begin{aligned} \frac{p_0 x_0^3}{6} - p_0 h_\psi^2 x_0 - \frac{c_1 h_\psi x_0^2}{2} \operatorname{sh} x_0 - l h_\psi + \\ + c_1 h_\psi^2 x_0 \operatorname{ch} \frac{x_0 - l}{h_\psi} = \psi_1(0). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Определяя из уравнений (2.16) неизвестные x_0 , c_1 и подставляя их в уравнения (2.11), (2.13), получаем выражения для прогиба и контактных реакций.

Замечание 1. Условие (2.6) в данной задаче выполняется автоматически. Тем не менее в данной статье оно выписано, чтобы показать, что функция прогиба является непрерывно дифференцируемой функцией на отрезке $[0, l]$.

Замечание 2. Использование уравнений, приведенных к нижней лицевой поверхности, позволило записать условие выстилания более компактным образом. Например, в работах [2, 4] условие выстилания принимается в виде

$$w^{-h/2} = \Delta,$$

где $w^{-h/2}$ — прогиб нижней лицевой поверхности, являющийся функцией от прогиба и его второй производной. ■

На рисунке 1 приведен пример расчета прогиба и контактных реакций для пластины, имеющей следующие физические и геометрические параметры:

$$q_0 = 0,04 \text{ кг/см}^2, \nu = 0,3, E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2,$$

$$l = 100 \text{ см}, h = 1 \text{ см}, \Delta = 0,1 \text{ см}.$$

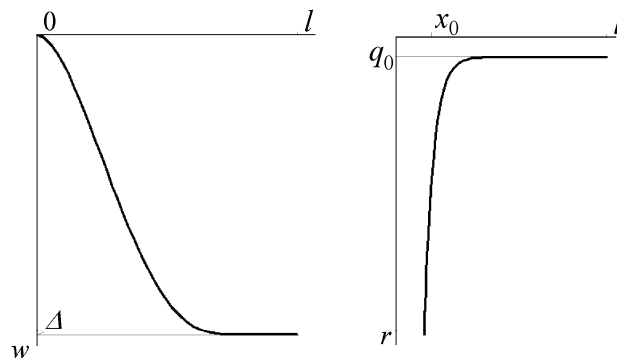


Рис. 1. Прогиб (w) и контактные реакции (r)

При любых параметрах пластины контактные реакции имеют следующий характерный вид — в средней части реакции равны действующей нормальной нагрузке, а на краях области контакта имеются пиковые значения. При этом контактные реакции описываются квадратично суммируемой функцией (см. (2.11), (2.15)).

Литература

1. **Ермоленко А.В.** Теория плоских пластин типа Кармана–Тимошенко–Нагди относительно произвольной базовой плоскости // В мире научных открытий. Красноярск: НИЦ, 2011. №8.1 (20). С. 336–347.
2. **Михайловский Е.И., Бадочкин К.В., Ермоленко А.В.** Теория изгиба пластин типа Кармана без гипотез Кирхгофа // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1. Мат. Мех. Инф. Вып. 3. 1999. С. 181–202.
3. **Ермоленко А.В.** О контактном взаимодействии цилиндрически изгибаемой пластины с абсолютно жестким основанием // Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела: Тр. научн. школы акад. В.В.Новожилова. СПб.: СПбГУ, 2000. Вып. 2. С. 79–95.
4. **Михайловский Е.И.** Элементы конструктивно–нелинейной механики. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского университета, 2011. 212 с.

Summary

Yermolenko A. V. On analytical solution of the contact problem

Analytical solution for a cylindrically bending plate and a rigid foundation was obtained with using the Karman–Timoshenko–Naghdi type equations, which were given to the lower surface of the plate.

Keywords: theory of plates, contact problem, analytical solution.

Сыктывкарский государственный университет

Поступила 11.05.2012