Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.15.2012

УДК 539.3

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТОРОИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ С ОДНОСТОРОННИМ ПОДКРЕПЛЕНИЕМ

В. Н. Тарасов, В. Ю. Андрюкова

Рассматривается осесимметричная задача об устойчивости торообразной оболочки, находящейся под действием внешнего нормального давления. Для вычисления работы внешних сил используется точная формула. В работе применяется вариационный подход, для конечномерной аппроксимации используются кубические сплайны. Исследуется влияние нелинейных слагаемых, обусловленных односторонним контактом с упругим наполнителем, на величину критической силы.
Ключевые слова: торообразная оболочка, устойчивость, кубические сплайны, односторонний контакт, критическая сила, вариационная задача.

1. Постановка задачи

Предположим, что оболочка вращения, срединную поверхность которой обозначим через S, в результате деформации приобрела форму $\tilde{S}$. Обозначим через g_{ij}, h_{ij}, $\tilde{g}_{ij}$, $\tilde{h}_{ij}$, $i, j = 1, 2$ коэффициенты первой и второй квадратичных форм недеформированной и деформированной поверхности соответственно. Согласно [2] энергию деформации, связанную с переходом из состояния S в состояние $\tilde{S}$, можно вычислить по формуле:

$$U_s = \int\int \Phi_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \kappa_1, \kappa_2) ds, \qquad (1)$$

где

$$\Phi_1 = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)}(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\nu\kappa_1\kappa_2) + \frac{Eh}{2(1-\nu^2)}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\nu\varepsilon_1\varepsilon_2), \qquad (2)$$

E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, ε_1 и ε_2 – экстремальные значения отношения

$$\frac{\sum_{i,j=1}^{2}(\tilde{g}_{ij} - g_{ij})du_i du_j}{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} du_i du_j}, \tag{3}$$

κ_1 и κ_2 – экстремальные значения отношения

$$\frac{\sum_{i,j=1}^{2}(\tilde{h}_{ij} - h_{ij})du_i du_j}{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} du_i du_j}. \tag{4}$$

Рассмотрим задачу устойчивости тора, нагруженного внешним нормальным давлением. Тогда в (3) и в (4) $u_1 = \theta$ - полярный угол в плоскости меридиана, $u_2 = \lambda$ - угол в плоскости параллельного круга. В результате осесимметричной деформации поверхность $\tilde{S}$ представляет собой поверхность вращения вокруг оси z некоторой кривой γ, расположенной в плоскости XOZ и задаваемой уравнениями $x = \varphi(\theta)$, $z = \psi(\theta)$. Точка $(\varphi(\theta),\, 0,\, \psi(\theta))$ кривой γ при повороте на угол λ переходит в точку $(\varphi(\theta)\cos\lambda,\, \varphi(\theta)\sin\lambda,\, \psi(\theta))$, тогда уравнения поверхности вращения будут иметь вид [1]

$$\begin{cases} x = \varphi(\theta)\cos\lambda, \\ y = \varphi(\theta)\sin\lambda, \\ z = \psi(\theta). \end{cases} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \lambda \le 2\pi. \tag{5}$$

Обозначим через $w(\theta)$ и $u(\theta)$ нормальное и касательное перемещения точек поверхности тора. Декартовы координаты точек торообразной поверхности до деформации будут определяться уравнениями

$$\begin{cases} x = (R + a\cos\theta)\cos\lambda, \\ y = (R + a\cos\theta)\sin\lambda, \\ z = a\sin\theta, \end{cases} \tag{6}$$

т.е. для недеформированного тора $\varphi = R + a\cos\theta$, $\psi = a\sin\theta$.

После деформации уравнения поверхности будут иметь вид (5), где

$$\begin{cases} \varphi(\theta) = R + (a + w(\theta))\cos\theta - u(\theta)\sin\theta, \\ \psi(\theta) = (a + w(\theta))\sin\theta - u(\theta) cos\theta. \end{cases} \tag{7}$$

Будем исследовать потерю устойчивости в малом по осесимметричной форме, когда образующиеся выпучины имеют вид кольцевых складок в направлении координаты λ (перемещения не зависят от λ).

Для поверхности вращения первая и вторая квадратичная формы поверхности записываются в виде [1]

$$\left\{\begin{array}{l} I=\left(\varphi'^2+\psi'^2\right)d\theta^2+\varphi^2 d\lambda^2,\\ II=\left(\frac{\psi''\varphi'-\psi'\varphi''}{\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}}\right)d\theta^2+\frac{\psi'\varphi}{\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}}d\lambda^2. \end{array}\right. \tag{8}$$

Для недеформированной поверхности:

$$\left\{\begin{array}{l} I_0=a^2d\theta^2+(R+a\cos\theta)^2d\lambda^2,\\ II_0=ad\theta^2+\cos\theta(R+a\cos\theta)d\lambda^2. \end{array}\right. \tag{9}$$

Используя формулы (3), (4), (6), (8), (9) можно получить выражения для деформаций ε_1, ε_2 и кривизн κ_1, κ_2 [2]. Квадратичные формы I и II в случае осесимметричной деформации имеют диагональный вид. Поэтому

$$\left\{\begin{array}{l} \varepsilon_1=\dfrac{\varphi'^2+\psi'^2-a^2}{a^2},\\ \varepsilon_2=\dfrac{\varphi^2-(R+a\cos\theta)^2}{(R+a\cos\theta)^2},\\ \kappa_1=\dfrac{\psi''\varphi'-\psi'\varphi''}{a^2\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}}-\dfrac{1}{a},\\ \kappa_2=\dfrac{\psi'\varphi}{\cos^2\theta(R+a\cos\theta)^2\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}}-\dfrac{1}{\cos\theta(R+a\cos\theta)}. \end{array}\right. \tag{10}$$

Для внешнего нормального давления в соответствии с теоремой Эйлера – Бернулли работа внешних сил равна

$$A=P\Delta V,$$

где ΔV – изменение объема оболочки в результате деформации.

Как известно [8], объем тела, поверхность которого задается уравнениями $x=x(\theta,\lambda)$, $y=y(\theta,\lambda)$, $z=z(\theta,\lambda)$, определяется (с точностью до знака)

$$V=\frac{1}{3}\int\int det\left[\begin{array}{ccc} x & y & z\\ x'_\theta & y'_\theta & z'_\theta\\ x'_\lambda & y'_\lambda & z'_\lambda \end{array}\right]d\theta d\lambda. \tag{11}$$

В случае осесимметричной деформации можно принять $\lambda=0$.

Объем оболочки после деформации (см. (5), (7))вычисляется по формуле [3]:

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_0^{2\pi}\Phi_2\left(w,u,w',u'\right)d\theta, \tag{12}$$

где
$$\Phi_2 = det\,\|a_{ij}\|\,, i, j \in 1:3,$$
элементы матрицы $\|a_{ij}\|$ имеют вид

$a_{11} = R + a\cos\theta + w(\theta)\cos\theta - u(\theta)\sin\theta,$
$a_{12} = 0,$
$a_{13} = a\sin\theta + w(\theta)\sin\theta + u(\theta)\cos\theta,$
$a_{21} = -a\sin\theta + w^{'}(\theta)\cos\theta - w(\theta)\sin\theta - u^{'}(\theta)\sin\theta - u(\theta)\cos\theta,$
$a_{22} = 0,$
$a_{23} = a\cos\theta + w^{'}(\theta)\sin\theta + w(\theta)\cos\theta + u^{'}(\theta)\cos\theta - u(\theta)\sin\theta,$
$a_{31} = 0,$
$a_{32} = R + a\cos\theta + w(\theta)\cos\theta - u(\theta)\sin\theta,$
$a_{33} = 0.$

Предположим, что внутри оболочки находится упругий наполнитель, который работает как простое винклеровское основание с жесткостью C. Тогда полная энергия деформации будет иметь вид
$$J = J_1 + J_2 - J_3,$$
где
$$J_1 = 2\pi \int_0^{2\pi} \Phi_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \kappa_1, \kappa_2) a(R + a\cos\theta) d\theta,$$
$$J_2 = 2\pi \int_0^{2\pi} \frac{C}{2} w^2 a(R + a\cos\theta) d\theta, \tag{13}$$
$$J_3 = P\Delta V.$$

В устойчивом положении равновесия полная энергия принимает минимальное значение. Таким образом, приходим к вариационной задаче
$$J \to \min_{w,u}, \tag{14}$$
где функции w, u удовлетворяют условиям периодичности.

2. Численный метод

Перемещения w, u будем аппроксимировать сплайнами [7]
$$w = \sum_{j=0}^{n+2} w_j B_j(\theta), \quad u = \sum_{j=0}^{n+2} u_j B_j(\theta), \tag{15}$$

где

$$\theta \in [0, l]\,,\ \ l = 2\pi,\ \ h = \frac{l}{n},\ \ \theta_i = ih,\ \ B_i(\theta) = B(\theta - (i-3)h),\ \ i = 3..n-1.$$

$$B(\theta) = \frac{1}{4h^4}\left(\frac{1}{6}\theta_+^3 - \frac{2}{3}(\theta - h)_+^3 + (\theta - 2h)_+^3 - \frac{2}{3}(\theta - 3h)_+^3 + \frac{1}{6}(\theta - 4h)_+^3\right),$$

$$B_0 = 1 + \frac{1}{h^3}\left(-\frac{1}{6}\theta_+^3 + \frac{1}{2}(\theta_+ - h)_+^3 - \frac{1}{2}(\theta - 2h)_+^3 + \frac{1}{6}(\theta - 3h)_+^3\right),$$

$$B_1 = \theta + \frac{1}{h^2}\left(-\frac{1}{3}\theta_+^3 + \frac{5}{6}(\theta - h)_+^3 - \frac{2}{3}(\theta - 2h)_+^3 + \frac{1}{6}(\theta - 3h)_+^3\right),$$

$$B_2 = \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{h}\left(-\frac{11}{36}\theta_+^3 + \frac{1}{2}(\theta - h)_+^3 - \frac{1}{4}(\theta - 2h)_+^3 + \frac{1}{18}(\theta - 3h)_+^3\right),$$

$$B_n(\theta) = B_2\,(l - \theta)\,,\ B_{n+1}(\theta) = B_1\,(l - \theta)\,,\ B_{n+2}(\theta) = B_0\,(l - \theta)\,,$$

$$\theta_+ = \max\{0, \theta\} = \frac{1}{2}(|\theta| + \theta).$$

Граничные условия периодичности будут выполнены, если положить

$$w_0 = w_{n+2},\ w_1 = -w_{n+1},\ w_2 = w_n,$$

$$u_0 = u_{n+2},\ u_1 = -u_{n+1},\ u_2 = u_n.$$

Введем вектор $z \in R^{2n}$, где

$$z_1 = w_2,\ z_2 = w_3,\ ...,\ z_{n-1} = w_n,$$

$$z_n = u_1,\ z_{n+1} = u_2,\ ...,\ z_{2n} = u_{n+1}. \qquad (16)$$

Подставляя (15) в функционалы J_1, J_2, J_3, получим функции $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$ и

$$f(z; P) = f_1(z) + f_2(z) - Pf_3(z).$$

Необходимое условие экстремума записывается в виде

$$\frac{\partial f\,(z, P)}{\partial z} = 0. \qquad (17)$$

Для решения задачи устойчивости оболочки требуется найти минимальное значение силы P, при котором происходит бифуркация решения системы уравнений (17). Необходимое условие бифуркации заключается в том, что матрица вторых частных производных становится вырожденной, т.е.

$$det\left[\frac{\partial^2 f\,(z, P)}{\partial z^2}\right] = 0. \qquad (18)$$

Введем в рассмотрение матрицы

$$Q = \frac{\partial^2 f_1(z)}{\partial z^2}, \quad Q_2 = \frac{\partial^2 f_2(z)}{\partial z^2}, \quad G = \frac{\partial^2 f_3(z)}{\partial z^2}.$$

Если рассматривают квадратичное приближение (что соответствует линейной теории тонких оболочек), то полследние матрицы вычислячют при $z = 0$. Тогда уравнение (18) означает, что система уравнений

$$Qz + Q_2 z = \lambda G z \tag{19}$$

имеет нетривиальное решение, где $\lambda = P$ – обобщенное собственное число. Отметим, что

$$f_2(z) = \frac{1}{2}(Gz, z).$$

Задача поиска обобщенного собственного числа для системы (19) может быть сформулирована в виде экстремальной проблемы

$$\chi(z) = \frac{1}{2}(Qz, z) + \frac{1}{2}(Q_2 z, z) \to \min \tag{20}$$

при ограничениях

$$\xi(z) = \frac{1}{2}(Qz, z) = 1. \tag{21}$$

В самом деле, применяя правило множителей Лагранжа к задаче (20) - (21), получим уравнение (19).

Предположим, что оболочка может отходить от наполнителя при $w > 0$, то есть сила реакции наполнителя имеет вид

$$Cw_- = Cmin\{0, w\} = -\frac{C}{2}(|w| - w), \tag{22}$$

а энергия, связанная с упругим наполнителем, вычисляется по формуле

$$J_2 = \pi \int_0^{2\pi} Cw_-^2 a(R + a\cos\theta) d\theta. \tag{23}$$

При конечномерной аппроксимации функционала J_2 вместо функции $f_2(z)$ получаем функцию $\widetilde{f}_2(z)$. Поэтому уравнение (19) не имеет места, ибо матрица Q_2 не существует. Заметим, что $\widetilde{f}_2(z)$ является положительно однородной функцией, то есть для любого $\alpha > 0$ следует $\widetilde{f}_2(\alpha z) = \alpha^2 \widetilde{f}_2(z)$, поэтому в данном случае вместо задачи (20) - (21) получаем задачу минимизации функции

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}(Qz, z) + \widetilde{f}_2(z) \to \min \tag{24}$$

при ограничениях (21). Функция $\Phi(z)$ является непрерывно дифференцируемой, но не имеет непрерывных вторых частных производных.

Для решения задач (20) - (21) или (24) - (21) применялся метод последовательных приближений [6]: пусть z_0 – начальное приближение, причем $\xi(z) = 1$. Пусть получена точка z_k. Тогда $\tilde{z}_{k+1}$ – есть решение задачи выпуклого программирования

$$\Phi(z) \to \min$$

при ограничениях

$$(Gz_k, z) = (Gz_k, z_k) = 2.$$

Пусть $\alpha_k = \xi\left(\tilde{z}_{k+1}\right)$. Тогда $z_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_k}}\tilde{z}_{k+1}$.

Можно показать, что любая предельная точка последовательности z_k является стационарной, то есть удовлетворяет правилу множителей Лагранжа

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}\left(z_*\right) = \lambda G z_*. \tag{25}$$

Находим обобщенное собственное число и z_* – собственный вектор.

3. Результаты численных экспериментов

В [4] на основании линейной теории тонких оболочек приведена формула критического нормального давления для торообразной оболочки:

$$q = \frac{\psi E h}{a(1-\nu^2)}, \tag{26}$$

где

$$\psi = \frac{4k^2\left(n^2 + \frac{1-\mu^2}{2}n^2k^2 + (1+\mu)^2k^2 + (1+\mu)\right)}{\left(4+k^2\right)\left(n^4\left(2+k^2\right) + (1+\mu)\,k^2n^2\right)} +$$
$$+\frac{2h^2}{3a^2\left(4+k^2\right)}\left(\frac{\left(n^2 - 1 + \frac{n^2k^2}{2}\right)\left(n^2\left(1+\frac{k^2}{2}\right) + k^2\right)}{n^2\left(2+k^2\right) + (1+\mu)\,k^2} + \frac{k^2}{4}\right).$$

В таблице 1 приведены значения параметра $\tilde{q} = \frac{h^3}{12(1-\nu^2)}P$ и значения параметра q, вычисленные по формуле (26). Из таблицы видно, что удовлетворительное совпадение с теоретическими результатами наблюдается при $\frac{a}{R} \le \frac{1}{3}$. При $\frac{1}{3} < \frac{a}{R} < 1$, по-видимому, формула (26) не является точной.

Таблица 1. Сравнение результатов с известными значениями критического давления.

h	0.3464	0.3464	0.3464	0.3464	0.4899	0.4899	0.4899	0.4899
R	20	15	15	10	10	15	20	30
a	5	5	4	4	2.5	5	5	15
$\tilde{q}$	0.0125	0.017	0.0213	0.0152	0.0369	0.0143	0.0222	0.0112
q	0.0126	0.0124	0.0192	0.0287	0.0373	0.0171	0.0173	0.0056

В таблице 2 введены следующие обозначения: C – жесткость наполнителя, q^* – значение критического параметра в случае жесткой связи с оболочкой упругого наполнителя (см. (13)), q_* – значение критического параметра в случае, когда оболочка может отходить от наполнителя (см. (23)), q – значение критического параметра для оболочки без наполнителя ($C = 0$).

Таблица 2. Значения критического давления для торообразной оболочки с упругим наполнителем внутри.

h	0.3464	0.3464	0.3464	0.3464	0.4899	0.4899
R	20	20	15	15	20	20
a	5	5	5	5	5	5
C	1	3	1	3	1	3
q^*	0.0175	0.0262	0.0223	0.0304	0.0340	0.0581
q_*	0.0158	0.0207	0.0208	0.0257	0.0290	0.0411
q	0.0126	0.0126	0.0171	0.0171	0.0173	0.0173

Таким образом, учет условия "односторонности" контакта оболочки и наполнителя является необходимым при решении задачи на устойчивость.

Отметим, что в работе использовалась точная нелинейная теория оболочек. На необходимость применения нелинейной теории оболочек при решении задач на устойчивость указывается в работе [5].

Литература

1. **Погорелов А.В.** Дифференциальная геометрия. // М.: Наука, 1974. 176 с.

2. **Погорелов А.В.** Геометрическая теория устойчивости оболочек. // М.: Наука, 1966. 296 с.

3. **Андрюкова В.Ю., Тарасов В.Н.** Некоторые задачи устойчивости упругих систем // Вестн. Сыктывкарского ун-та. Сер. 1: мат., мех., инф. 2003. Вып. 5. С. 21-34.

4. **Вольмир А.С.** Устойчивость деформируемых систем.// М.: Наука, 1967. 984 с.

5. **Паймушин В.Н.** Проблемы геометрической нелинейности и устойчивости в механике тонких оболочек и прямолинейных стержней.// ПММ Т71, 2007. Вып.5. С.880 - 893.

6. **Тарасов В.Н.** Об устойчивости упругих систем при односторонних ограничениях на перемещения. // Труды института математики и механики. Российская академя наук. Уральское отделение. Том 11, № 1, 2005. С. 177-188.

7. **Андрюкова В.Ю., Тарасов В.Н.** Применение сплайнов в задаче устойчивости сферической оболочки. // В мире научных открытий. Сер. : мат., мех., инф. 2011, №12. С. 214-222.

8. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. // Том 3. 656 с.

Summary

Tarasov V. N., Andryukova V. Yu. On stability behavior of a toroidal shell with a one-sided reinforcement.

The axisymmetric problem of stability of the toroidal shell that is subjected to external normal pressure is considered. For calculation of work of external forces the exact formula is used. In this paper the variational approach is applied, for a finite-dimensional approximation cubic splines are used. The influence of nonlinear terms caused by unilateral contact with an elastic filler on the value of critical force is investigated.

Keywords: toroidal shell, stability, cubic splines, one-sided contact, the critical force, the variational problem.

Отдел математики КНЦ УРОРАН
Сыктывкарский лесной институт *Поступила 15.05.2012*