*Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.15.2012*

УДК 512.566

О ПОЛУКОЛЬЦАХ SC–ФУНКЦИЙ

Е. М. Вечтомов, Е. Н. Лубягина

В работе изучается полукольцо $SC(X, \mathbf{I})$ всех $[0,1]$-значных функций на топологическом пространстве X, являющихся точными верхними гранями множеств непрерывных функций. Установлена двойственность между категорией тихоновских пространств X с непрерывными отображениями и категорией полуколец $SC(X, \mathbf{I})$ с полными гомоморфизмами в качестве морфизмов.
Ключевые слова: полукольцо, топологическое пространство, идеал, точная верхняя грань.

1. Введение

Разнообразные алгебраические системы функций и пространства функций образуют фундаментальное направление в математике, составляющее в частности основу функционального анализа, общей топологии, топологической алгебры. Многие абстрактные математические объекты могут быть реализованы как функциональные структуры на топологических пространствах.

В XX веке активно развивалась теория колец $C(X)$ непрерывных действительнозначных функций, ставшая классической [10]. В конце XX века стали систематически изучаться полукольца $C^+(X)$ непрерывных неотрицательных функций [1], что нашло свое отражение в монографии [6]. В последнее время исследуются полукольца $C(X, \mathbf{I})$ непрерывных $[0,1]$-значных функций на топологических пространствах X [3, 4, 7].

Важным разделом современной математики служат вопросы определяемости топологических пространств X кольцами $C(X)$, полукольцами $C^+(X)$ и $C(X, \mathbf{I})$ и другими алгебраическими структурами функций, а также задачи двойственности между топологическими и функционально-алгебраическими объектами [2].

Отметим, что любое хьюитовское пространство X определяется кольцом $C(X)$, полукольцом $C^+(X)$, решеткой всех подалгебр полукольца $C^+(X)$ [5] и другими алгебрами непрерывных функций (см. [2]). Всякий компакт X определяется полукольцом $C(X, \mathbf{I})$. В [3] показано, что произвольный компакт X определяется решеткой $IdC(X, \mathbf{I})$ всех идеалов и решеткой $ConC(X, \mathbf{I})$ всех конгруэнций полукольца $C(X, \mathbf{I})$. Всякое же тихоновское пространство X определяется топологическими кольцом $C(X)$, полукольцами $C^+(X)$ и $C(X, \mathbf{I})$, наделенными топологией поточечной сходимости. Заметим, что тихоновские пространства не определяются, вообще говоря, чисто алгебраическими структурами непрерывных функций на них. Изучались также и соответствующие двойственности.

В данной статье рассматривается полукольцо $SC(X, \mathbf{I})$ всех функций на топологическом пространстве X со значениями в числовом единичном отрезке $\mathbf{I}$, являющихся точными верхними гранями множеств непрерывных функций. Такие функции мы назвали *sc*-функциями. Они применяются в описании замкнутых идеалов и замкнутых конгруэнций полуколец и решеток $C(X, \mathbf{I})$ с топологией поточечной сходимости [4,7].

Целью данной статьи является доказательство теоремы двойственности для полуколец $SC(X, \mathbf{I})$ (теорема 1). Из нее вытекает, что любое тихоновское пространство X определяется полукольцом $SC(X, \mathbf{I})$ (теорема 2).

2. Предварительные понятия

Полукольцом называется непустое множество S с бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, для которых $< S, + >$ — коммутативная полугруппа с нейтральным элементом 0, $< S, \cdot >$ — полугруппа с нейтральным элементом 1 и $a(b+c) = ab + ac$, $(a+b)c = ac + bc$, $0 \cdot a = 0 = a \cdot 0$ для любых $a, b, c \in S$.

Информацию о полукольцах можно найти в монографии Голана [11], решеточные понятия — в книге Гретцера [8], основы общей топологии — в труде Энгелькинга [9].

Напомним, что *идеалом* коммутативного полукольца S называется всякое его непустое подмножество J, такое, что для любых $a, b \in J$, $s \in S$ выполняется: $as \in J$, $a + b \in J$. Идеал J в S называется *простым*, если его дополнение до S непусто и мультипликативно замкнуто. Идеал J полукольца S называется *полупростым*, если $a^2 \in J$ влечет $a \in J$ для любого $a \in S$.

Пусть X — произвольное топологическое пространство, $\mathbf{I} = [0, 1]$ — единичный числовой отрезок, рассматриваемый с обычными операциями умножения $\cdot$, max ($\vee$), min ($\wedge$) и со стандартной топологией. Через $\mathbf{I}^X$ обозначается полукольцо всех функций $X \to \mathbf{I}$ с поточечно определенными операциями сложения $\vee$ и умножения, а также взятия min функций и поточечным отношением порядка:

$$(f \vee g)(x) = \max(f(x), g(x)), (f \wedge g)(x) = \min(f(x), g(x)),$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x),\ f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$$
для любых фунций $f, g \in C(X, \mathbf{I})$ и всех точек $x \in X$.

Пусть $C(X, \mathbf{I})$ — полукольцо всех непрерывных функций, заданных на топологическом пространстве X и принимающих значения в топологическом полукольце $\mathbf{I}$, относительно операций $\vee$ и умножения $\cdot$ над функциями.

Для непустого подмножества $M \subseteq \mathbf{I}^X$ обозначим через $r_M = \sup M$ — точную верхнюю грань множества M в полной решетке $\mathbf{I}^X$.

Определение 1. Функцию $\varphi \in \mathbf{I}^X$ назовем *sc-функцией*, если $\varphi = r_M$ для подходящего непустого подмножества $M \subseteq C(X, \mathbf{I})$.

Заметим, что подмножество M в определениии *sc*-функции можно считать идеалом, поскольку $\sup M = \sup J$ для идеала J, порожденного множеством M.

Множество всех *sc*-функций на X обозначим через $SC(X, \mathbf{I})$. Имеют место включения: $C(X, \mathbf{I}) \subseteq SC(X, \mathbf{I}) \subseteq \mathbf{I}^X$. Относительно поточечного порядка $SC(X, \mathbf{I})$ является ограниченной дистрибутивной решеткой (предложение 1) — подрешеткой в $\mathbf{I}^X$.

Для тихоновского пространства X, подмножества $A \subseteq X$ и точки $x \in X$ полагаем:

$$M_A = \{f \in SC(X, \mathbf{I})) : f(A) = \{0\}\},\ M_x = M_{\{x\}},$$
$$N_x = SC(X, \mathbf{I}) \setminus (1 - M_x).$$

При этом M_A, N_x — идеалы идемпотентного полукольца $SC(X, \mathbf{I})$.

Относительно поточечного порядка $SC(X, \mathbf{I})$ не является, вообще говоря, полной подрешеткой в $\mathbf{I}^X$. Множество $SC(X, \mathbf{I})$ содержит точную верхнюю грань в $\mathbf{I}^X$ любого непустого множества своих элементов, но не обязано содержать их точную нижнюю грань. Легко видеть, что для неизолированной точки $x \in X$ и множества $1 - M_x \subseteq C(X, \mathbf{I})$ функция $\inf(1 - M_x) = 1 - \sup M_x = 1 - \varphi_x$ не является *sc*-функцией.

3. Свойства sc-функциий

Примеры sc-функций. 1. Положим $\varphi_A(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \in A; \\ 1, & \text{если } y \in X \setminus A \end{cases}$ для произвольного подмножества A топологического пространства X. То есть функция $\varphi_A = \chi_{(X \setminus A)}$ является характеристической функцией множества $X \setminus A \subseteq X$. Если множество A не замкнуто в топологическом пространстве X, то функция φ_A не являются sc-функцией. Для любого замкнутого подмножества A тихоновского пространства X функция φ_A будет sc-функцией.

2. Для произвольной функции $f \in C(X, \mathbf{I})$ на тихоновском пространстве X получаем sc-функцию φ, принимающую в точках $x_1, ..., x_n \in X, n \in \mathbb{N}$, значения $\varphi(x_i) < f(x_i)$, а в остальных точках $\varphi(x) = f(x)$. В частности такой будет функция $\varphi_x = \varphi_{\{x\}} = \mathrm{sup} M_x$ в решетке $\mathbf{I}^X$.

3. Для sc-функции φ функция $1 - \varphi$ не обязана быть sc-функцией, как это показывают примеры 1 и 2.

4. Функция Дирихле на числовой прямой $\mathbb{R}$ не будет sc-функцией.

Замечание 1. Тихоновость T_1-пространства X равносильна тому, что для любого замкнутого подмножества $A \subseteq X$ функция φ_A является sc-функцией. Дискретность произвольного топологического пространства X эквивалентна равенству $SC(X, \mathbf{I}) = \mathbf{I}^X$. А равенство $SC(X, \mathbf{I}) = C(X, \mathbf{I})$ эквивалентно тому, что в топологическом пространстве X все замкнутые множества открыто-замкнуты; для T_1-пространства X это означает его дискретность.

Полукольцо $C(X, \mathbf{I})$ можно понимать как подпространство тихоновской степени $\mathbf{I}^X$ $|X|$ экземпляров единичного отрезка $\mathbf{I}$ (с топологией поточечной сходимости). Обозначим соответствующее топологическое полукольцо через $C_p(X, \mathbf{I})$. Через $\overline{J}$ обозначается замыкание множества J в топологическом пространстве $C_p(X, \mathbf{I})$.

Идеал J полукольца $C_p(X, \mathbf{I})$ называется *замкнутым*, если $J = \overline{J}$. Отметим, что для произвольной функции $\varphi \in \mathbf{I}^X$ множество $J(\varphi) = \{f \in C(X, \mathbf{I}) : f \leq \varphi\}$ будет замкнутым идеалом в $C_p(X, \mathbf{I})$. Можно показать, что ими исчерпываются все замкнутые идеалы в $C_p(X, \mathbf{I})$.

Далее укажем исходные свойства sc-функциий на произвольном топологическом пространстве X.

Свойство 1. *Пусть φ, ψ — произвольные функции из $\mathbf{I}^X$, I, J — некоторые идеалы полукольца $C(X, \mathbf{I})$. Тогда:*
1) $\varphi \leq \psi \Longleftrightarrow J(\varphi) \subseteq J(\psi)$;
2) $J \subseteq I \Longrightarrow r_J \leq r_I$;
3) $\overline{J} \subset \overline{I} \Longrightarrow r_{\overline{J}} < r_{\overline{I}}$;
4) $r_{J(\varphi)} \leq \varphi$;

5) $J(\varphi) = J(r_{J(\varphi)})$;
6) $\overline{J} = J(r_J)$;
7) J *— замкнутый* $\Leftrightarrow J = J(r_J)$.

Доказательство. Утверждения 1)–5) вытекают из определений. Утверждение 6) следует из предложения 5 [4]. Ясно, что 6) $\Rightarrow$ 7). $\square$

Свойство 2. *Функция $\varphi \in \mathbf{I}^X$ является sc-функцией тогда и только тогда, когда $\varphi = r_{J(\varphi)}$. При этом $\varphi(x) = max\{f(x) : \varphi \geq f \in C(X, \mathbf{I})\}$ для любой точки $x \in X$.*

Доказательство. Достаточность очевидна по определению. Если $\varphi \in SC(X, \mathbf{I})$, то $\varphi = r_J$ для некоторого идеала $J \subseteq C(X, \mathbf{I})$. При этом $J \subseteq J(\varphi)$, то есть $r_J \leq r_{J(\varphi)}$ (свойство 1, 2)). С другой стороны, $\varphi \geq r_{J(\varphi)}$ (свойство 1, 4)). Значит, $\varphi = r_J = r_{J(\varphi)}$. Второе часть вытекает из леммы 11 [4]. $\square$

Свойство 3. *Пусть φ, ψ — произвольные функции из $\mathbf{I}^X$. Тогда $r_{J(\varphi)} = r_{J(\psi)} \Leftrightarrow J(\varphi) = J(\psi)$.*

Доказательство. Если $J(\varphi) = J(\psi) = J$, то очевидно $r_{J(\psi)} = \sup J = r_{J(\varphi)}$. Обратно по свойству 1, 5) имеем $J(\varphi) = J(r_{J(\varphi)}) = J(r_{J(\psi)}) = J(\psi)$. $\square$

Свойство 4. *Для любого тихоновского пространства I, J — произвольные идеалы полукольца $C(X, \mathbf{I})$. Тогда:*
1) $r_{\overline{J}} = r_J$;
2) *если* $\overline{J} \subset \overline{I}$, *то* $r_J < r_I$.

Доказательство. 1) Очевидно.

2) По предыдущему пункту и свойству 1, 3) если $\overline{J} \subset \overline{I}$, то $r_J = r_{\overline{J}} < r_{\overline{I}} = r_I$. $\square$

Свойство 5. *Для произвольных функций $f, g \in C(X, \mathbf{I})$ имеем: $J(f) \vee J(g) = J(f \vee g)$ и $J(f) \cap J(g) = J(f \wedge g)$.*

Доказательство. Заметим, что $J(f) \vee J(g) = \{k \vee e : k, e \in C(X, \mathbf{I}), k \leq f, e \leq g\} \subseteq \{h \in C(X, \mathbf{I}) : h \leq f \vee g\} = J(\varphi \vee \psi)$. Обратно, для любой функции $h \in J(\varphi \vee \psi)$ получаем $h = h \wedge (f \vee g) = (h \wedge f) \vee (h \wedge g)$, где $h \wedge f, h \wedge g \in C(X, \mathbf{I})$. Аналогично, $J(f) \cap J(g) = \{h \in C(X, \mathbf{I}) : h \leq f, h \leq g\} = \{h \in C(X, \mathbf{I}) : h \leq f \wedge g\} = J(\varphi \wedge \psi)$. $\square$

Свойство 6. *Если $u, v \in SC(X, \mathbf{I})$, то $uv, u \wedge v \in SC(X, \mathbf{I})$.*

Доказательство. По утверждению 2 имеем: $u = r_{J(u)}$ и $v = r_{J(v)}$. Тогда $uv = \sup_{\mathbf{I}^X} J(u) \cdot \sup_{\mathbf{I}^X} J(v) = \sup_{\mathbf{I}^X} (J(u) \cdot J(v)) \in SC(X, \mathbf{I})$. Аналогично, $u \wedge v \in SC(X, \mathbf{I})$. $\square$

Свойство 7. *Для непустого подмножества $\Omega \subseteq SC(X, \mathbf{I})$ имеем:*
1) $\sup_{\mathbf{I}^X} \Omega \in SC(X, \mathbf{I})$;
2) $\inf_{SC(X,\mathbf{I})} \Omega = r_{J(\chi)}$, *где* $\chi = \inf_{\mathbf{I}^X} \Omega$.

Доказательство. 1) Действительно,

$$\begin{gathered}\sup\Omega=\sup_{\varphi\in\Omega}\varphi=\sup_{\varphi\in\Omega}r_{J(\varphi)}=\\=\sup_{\varphi\in\Omega}\sup J(\varphi)=\sup(\bigcup_{\varphi\in\Omega}J(\varphi))\in SC(X,\mathbf{I}).\end{gathered}$$

Пункт 2) очевиден. □

Предложение 1. *Для любого топологического пространства X множество $SC(X,\mathbf{I})$ является полукольцом относительно операций $\vee$ и $\cdot$ подрешеткой в $\mathbf{I}^X$ и полной решеткой относительно поточечного порядка $\leq$.*

Доказательство. В силу свойств 6 и 7 структура $SC(X,\mathbf{I})$ будет полукольцом, а по свойству 7 — полной решеткой. □

Замечание 2. Можно ввести понятие ic-функций, двойственное понятию sc-функции. Для любого непустого подмножества J множества $C(X,\mathbf{I})$ назовем функции вида $\varphi=\inf J$ в $\mathbf{I}^X$ *ic-функциями.* Для подмножества A тихоновского пространства X имеет место соотношение: φ_A — ic-функция $\Leftrightarrow$ A — открыто.

4. Полукольца sc-функций

Идемпотентами в полукольце $SC(X,\mathbf{I})$ над тихоновским пространством X будут функции $\varphi=\varphi_A$ по всевозможным замкнутым множествам $A\subseteq X$. Обозначим через $O(X)$ множество всех идемпотентов в полукольце $SC(X,\mathbf{I})$. Тогда $O(X)$ является подполукольцом в $SC(X,\mathbf{I})$. Относительно поточечного порядка $O(X)$ есть решетка, изоморфная решетке всех открытых множеств топологического пространства X.

Предложение 2. *Для всякого тихоновского пространства X и любой функции $\varphi\in SC(X,\mathbf{I})$ эквивалентны следующие утверждения:*
1) *$\varphi=\varphi_A$ для некоторого открыто-замкнутого множества $A\subseteq X$;*
2) *φ — дополняемый идемпотент в полукольце $SC(X,\mathbf{I})$.*

Доказательство очевидно. □

Дополняемые идемпотенты образуют булеву алгебру в решетке $O(X)$, изоморфную решетке всех открыто-замкнутых множеств в X. Коатомами решетки $O(X)$ будут в точности функции $\varphi_x, x\in X$. Функцию $\varphi\in SC(X,\mathbf{I})$ назовем *цепной*, если множество $\{\psi\in SC(X,\mathbf{I}):\varphi\leq\psi\}$ является цепью в решетке $SC(X,\mathbf{I})$. Для тихоновского пространства X минимальные цепные функции совпадают с функциями $\varphi_x, x\in X$.

Лемма 1. *Для всякого тихоновского пространства X и простого идеала J в $SC(X,\mathbf{I})$ функция r_J принимает значения только* 0 *и* 1.

Доказательство. Заметим, что $\sqrt{r_J}\in J$. Тогда для точки $x\in X$, в которой $r_J(x)\neq 1$, то $\sqrt{r_J}(x)\leq r_J(x)$. Значит, $r_J(x)=0$. □

Лемма 2. *Для всякого тихоновского пространства X и максимального идеала J в $SC(X, \mathbf{I})$ имеем:* $r_J = 1$.

Доказательство. Действительно, если для какой-то точки $x \in X$ $r_J(x) \neq 1$, то $J \subset N_x$, то есть идеал J не является максимальным. □

Заметим, что идеалы $N_x, x \in X$, будут максимальными идеалами полукольца $SC(X, \mathbf{I})$. Для любой точки x тихоновского пространства X получаем главный идеал $M_x = \varphi_x SC(X, \mathbf{I})$.

Определение 2. Идеал J полукольца $SC(X, \mathbf{I})$, содержащий вместе с любым своим подмножеством его точную верхнюю грань r_J, назовем *полным.*

Предложение 3. *Для всякого тихоновского пространства X полные простые идеалы в полукольце $SC(X, \mathbf{I})$ суть в точности идеалы M_x по всем точкам $x \in X$.*

Доказательство. Рассмотрим в полукольце $SC(X, \mathbf{I})$ идеалы $M_x, x \in X$. Для любых функций $u, v \in SC(X, \mathbf{I}) \setminus M_x$ имеем $(uv)(x) \neq 0$, то есть $uv \notin M_x$. Для любого подмножества $A \subseteq M_x$ получаем $r_A(x) = 0$, то есть $r_A \in M_x$. Значит, собственный идеал M_x простой и полный.

Обратно, пусть J — полный простой идеал в $SC(X, \mathbf{I})$. Так как идеал J собственный и полный, то $r_J \neq \mathbf{1}$. Тогда, очевидно, найдется точка $x \in X$, в которой $r_J(x) = 0$, то есть $J \subseteq M_x$.

Предположим далее, что найдется еще одна точка $y \in X, y \neq x$, в которой $r_J(y) = 0$. В силу тихоновости пространства X для некоторых непересекающихся окрестностей U_1 и U_2 точек x и y существуют такие функции $f_1, f_2 \in C(X, \mathbf{I})$, что $f_1(x) = 1$, $f_2(y) = 1$, $f_1 = 0$ на $X \setminus U_2$, $f_2(y) = 1$, $f_2 = 0$ на $X \setminus U_1$. Тогда $f_1 f_2 = 0$, откуда $f_1 \in J$ или $f_1 \in J$. Но $f_1 \notin M_x \supseteq J$ и $f_2 \notin M_y \supseteq J$, противоречие. Значит, $r_J = \varphi_x \in J$. Поэтому $M_x = \varphi_x SC(X, \mathbf{I}) \subseteq J$. □

Следствие. *Для всякого тихоновского пространства X полные полупростые идеалы в полукольце $SC(X, \mathbf{I})$ суть в точности M_A по всем замкнутым множествам $A \subseteq X$.*

Доказательство следует из того, что в коммутативном полукольце полупростые идеалы совпадают с пересечениями простых идеалов, их содержащих. □

5. Теорема двойственности

Теорема 1. *Категория всех полуколец $SC(X, \mathbf{I})$ и их полных гомоморфизмов антиэквивалентна (двойственна) категории всех тихоновских пространств и их непрерывных отображений.*

Для доказательства теоремы рассмотрим сначала несколько предварительных утверждений.

Определение 3. Гомоморфизм $\alpha : SC(X, \mathbf{I}) \to SC(Y, \mathbf{I})$ полуколец назовем *полным*, если он сохраняет все точные верхние грани и все функции-константы.

Лемма 3. *При полном гомоморфизме праобраз простого идеала — простой идеал, полного идеала — полный идеал.*

Доказательство очевидно. □

Для непрерывного отображения тихоновских пространств $\psi : Y \to X$ зададим отображение $\alpha_\psi : SC(X, \mathbf{I}) \to SC(Y, \mathbf{I})$ по правилу:

$$\alpha_\psi(f)(y) = f(\psi(y)) \text{ для любых функции } f \in SC(X, \mathbf{I}) \text{ и точки } y \in Y.$$

Лемма 4. *Для любого непрерывного отображения тихоновских пространств $\psi : Y \to X$ отображение α_ψ является полным гомоморфизвом, причем, $\alpha_\psi(C(X, \mathbf{I})) \subseteq C(Y, \mathbf{I})$.*

Доказательство. Поскольку для любых функций $u, v \in SC(X, \mathbf{I})$ и точки $y \in Y$ имеем $\alpha_\psi(u \vee v)(y) = (u \vee v)(\psi(y)) = u(\psi(y)) \vee v(\psi(y)) = \alpha_\psi(u)(y) \vee \alpha_\psi(v)(y) = (\alpha_\psi(u) \vee \alpha_\psi(v))(y)$ и, аналогично, $\alpha_\psi(uv)(y) = (\alpha_\psi(u)\alpha_\psi(v))(y)$, то отображение α_ψ — полукольцевой гомоморфизм. При этом $\alpha_\psi(\mathbf{c})(y) = \mathbf{c}(\psi(y)) = \mathbf{c}$ для любых $c \in \mathrm{I}, y \in Y$.

Возьмем произвольное непустое подмножество $A \subseteq SC(X, \mathbf{I})$. Тогда $r_A = \sup A$ в $\mathbf{I}^X$ и $r_{\alpha_\psi(A)} = \sup \alpha_\psi(A) = \sup\{\psi \circ f : f \in A\}$ в $\mathbf{I}^X$. Для любой точки $y \in Y$ имеем $(\sup \alpha_\psi(A))(y) = \sup\{f(\psi(y)) : f \in A\} = (\sup A)(\psi(y)) = r_A(\psi(y)) = \alpha_\psi(r_A)$. Значит, $\alpha_\psi(r_A) = r_{\alpha_\psi(A)}$. □

Предложение 4. *Для любых тихоновских пространств X и Y всякий полный гомоморфизм $\alpha : SC(X, \mathbf{I}) \to SC(Y, \mathbf{I})$ имеет вид $\alpha = \alpha_\psi$ для некоторого единственного непрерывного отображения $\psi : Y \to X$.*

Доказательство. Пусть дан полный гомоморфизм $\alpha : SC(X, \mathbf{I}) \to SC(Y, \mathbf{I})$. Для произвольной точки $y \in Y$ идеал M_y простой и полный. Его прообраз $\alpha^{-1}(M_y)$ по лемме 3 также является полным простым идеалом в полукольце $SC(X, \mathbf{I})$. По предложению 3 $\alpha^{-1}(M_y) = M_x$ для единственной точки $x \in X$, которую обозначим $\psi(y)$. Получаем отображение $\psi : Y \to X$. Покажем, что ψ^{-1} сохраняет замкнутые множества. Для всякого замкнутого подмножества $A \subseteq X$ функция φ_A будет идемпотентом в полукольце $O(X)$, поэтому $\alpha(\varphi_A) \in O(Y)$, то есть $\alpha(\varphi_A) = \varphi_B$ для некоторого замкнутого множества $B \subseteq Y$. Для любой точки $y \in Y$ имеем: $y \in B \Leftrightarrow \alpha(\varphi_A) \in M_y \Leftrightarrow \varphi_A \in \alpha^{-1}(M_y) = M_{\psi(y)} \Leftrightarrow \psi(y) \in A \Leftrightarrow y \in \psi^{-1}(A)$, то есть $\psi^{-1}(A) = B$. Значит, отображение ψ непрерывно.

Покажем, что $\alpha = \alpha_\psi$. Для любой фиксированной точки $y \in Y$ рассмотрим отображение $p_y : SC(X, \mathbf{I}) \to \mathbf{I}$, для которого $p_y(f) = \alpha(f)(y)$ при всех $f \in SC(X, \mathbf{I})$. Отображение p_y — полукольцевой эпиморфизм, сохраняющий константы. Возьмем функцию $f \in SC(X, \mathbf{I})$. Обозначим $\psi(y) = x \in X$, $f(x) = c \in [0,1]$. Достаточно показать, что $p_y(f) = c$. Заметим, что $p_y(\varphi_x) = 0$, поскольку $\alpha(\varphi_x) \in M_y$. Для произвольного числа $q \in (0,1) \cup (1, +\infty)$ получаем: $p_y(f) = p_y(\varphi_x) \vee p_y(f) = p_y(\varphi_x \vee f) \leq p_y(\varphi_x \vee \mathbf{c^q}) = p_y(\varphi_x) \vee p_y(\mathbf{c^q}) = p_y(\mathbf{c^q}) = c^q$ в случае $q \in (0,1)$ и $p_y(f) \geq c^q$ в случае $q \in (1, +\infty)$. При $q \to 1$ в первом случае получаем $p_y(f) \leq c$, а во втором случае получаем $p_y(f) \geq c$. Откуда $p_y(f) = c$. Значит, $\alpha = \alpha_\psi$. $\square$

Доказательство теоремы вытекает из леммы 4 и предложения 4.

Теорема 2. *Всякое тихоновское пространство X определяется, однозначно с точностью до гомеоморфизма, полукольцом $SC(X, \mathbf{I})$.*

Замечание 3. В предложении 4 полный гомоморфизм α отображает подполукольцо идемпотентов $O(X)$ в подполукольцо идемпотентов $O(Y)$, причем $\alpha(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ и $\alpha(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. Соответствующее ограничение $\gamma : O(X) \to O(Y)$ тоже будет полным гомоморфизмом. Как легко видеть, любой полный гомоморфизм $\gamma : O(X) \to O(Y)$ для T_1-пространств X и Y индуцируется однозначно определенным непрерывным отображением $\psi : Y \to X$, то есть $\gamma = \gamma_\psi$. Это дает двойственность между категорией всех T_1-пространств X с непрерывными отображениями в качестве морфизмов и категорией всевозможных топологий (решеток открытых множеств) на пространствах X с их полными гомоморфизмами. Подобного рода общие двойственности и ранее привлекали внимание математиков (см. [2], §§ 3, 4).

Литература

1. **Варанкина В. И., Вечтомов Е. М., Семенова И. А.** Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы, конгруэнции //*Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4 № 2. С. 493–510.*

2. **Вечтомов Е. М.** Вопросы определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций //*Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 28. М.: ВИНИТИ, 1990. С. 3–46.*

3. **Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н.** Определяемость компактов решетками идеалов и конгруэнций полуколец непрерывных $[0,1]$-значных функций на них //*Изв. вузов. Матем., 2012. № 1. С. 87–91.*

4. **Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н.** Решетки непрерывных функций со значениями в единичном отрезке //*Вестник Сыктыв. ун-та. Математика. Механика. Информатика. Сер. 1. 2011. № 14. С. 3–20.*

5. **Вечтомов Е. М., Сидоров В. В.** Определяемость полуколец непрерывных функций решеткой их подалгебр //*Вестник Сыктыв. ун-та. Математика. Механика. Информатика. Сер. 1. 2010. № 11. С. 112–125.*

6. **Вечтомов Е. М., Сидоров В. В., Чупраков Д. В.** Полукольца непрерывных неотрицательных функций *Киров: Изд-во ВятГГУ, 2011. 312 с.*

7. **Лубягина Е. Н.** Замкнутые идеалы и замкнутые конгруэнции полуколец $C_p(X, \mathbf{I})$ // *Современные проблемы математики: тезисы Международной (43-й Всеросийской) молодежной школы-конференции. Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, 2012. С. 55—57.*

8. **Гретцер Г.** Общая теория решеток *М.: Мир, 1982. 456 с.*

9. **Энгелькинг Р.** Общая топология. *М.: Мир, 1986. 752 с.*

10. **Gillman L., Jerison M.** Rings of Continuous Functions. *University Series in Higher Mathematics, Graduate Texts in Math. Berlin: Springer-Verlag, 43, 1976.*

11. **Golan J. S.** Semirings and their applications. *Kluwer Academic Publishers, Dordaecht-Boston-London, 1999. 380 c.*

Summary

Vechtomov E. M., Lubiagina E. N. Semirings of *sc*-functions

In this paper we consider the semiring $SC(X, \mathbf{I})$ of $[0, 1]$-valued functions on a topological space X, which are sharp upper bounds of sets of continuous functions. We have established a duality between the category of Tychonoff spaces X with continuous maps and the category of semirings $SC(X, \mathbf{I})$ with complete homomorphisms as morphisms.

Keywords: semiring, topological space, upper bounds.

ВятГГУ *Поступила 27.04.2012*