*Вестник Сыктывкарского университета.*
*Сер.1. Вып.15.2012*

**УДК 517**

# ОБ ОДНОМ КЛАССЕ МАТРИЦ С ДИАГОНАЛЬНЫМ ПРЕОБЛАДАНИЕМ

***Е. В. Головнева***

Работа посвящена изучению свойств определителей одного класса вещественных матриц с диагональным преобладанием, важных для теории однородных Марковских процессов с конечным числом состояний.
*Ключевые слова:* определитель, Марковский процесс.

Рассмотрим квадратные вещественные матрицы $C^{[n]}$ произвольной размерности $n\times n$, такие, что $c_{ij}<0$ при $i\neq j$, а $c_{ii}=-(\sum\limits_{j\neq i} c_{ij})-f_i$, где $f_i<0$. Матрицы такого типа, но с противоположным соглашением о знаках элементов, естественно возникают при изучении спектральных свойств Марковского процесса с конечным числом состояний и непрерывным временем [1–4]. В частности, нахождение обратного оператора в случае сдвига на матрицу, кратную единичной, является по сути вычислением резольвенты генератора.

Задача о знаках матричных элементов обратного оператора при сдвигах в сторону диагонального преобладания может быть решена прямым разложением в матричный ряд. В самом деле, в силу принятого условия на матричные элементы, матрица $\tilde{C}^{[n]}$, определяемая равенством

$$C^{[n]}=diag(c_{11},c_{22},...)\cdot(I+\tilde{C}^{[n]}),$$

имеет построчную $l_1$-норму, строго меньшую единицы: $||\tilde{C}^{[n]}||<1$. Как следствие, обратная к $C^{[n]}$ матрица существует (что, впрочем, гарантируется обычной теоремой Гершгорина [5, 6]) и может быть найдена суммированием сходящегося по операторной $l_1$-норме ряда

$$\left(C^{[n]}\right)^{-1}=\left(I+\tilde{C}^{[n]}\right)^{-1}\cdot diag(c_{11}^{-1},c_{22}^{-1},...)=\left(\sum_{m=0}^{\infty}\left(-\tilde{C}^{[n]}\right)^{m}\right)\cdot diag(c_{11}^{-1},c_{22}^{-1},...),$$

где $\left(-\tilde{C}^{[n]}\right)^0 \equiv I$. В силу того, что по условию все диагональные элементы матрицы $C^{[n]}$ положительны, а все элементы матрицы $\tilde{C}^{[n]}$ – отрицательны, очевидно, что все матричные элементы $\left(C^{[n]}\right)^{-1}$ строго положительны.

Приведеное выше рассуждение с разложением в матричный ряд достаточно гибко и позволяет, например, решать задачу о знаках вещественной части матричных элементов обратного оператора при комплексных сдвигах. Однако, для случая строго вещественного сдвига, прямое элементарное рассуждение представляется достаточно поучительным и составляет предмет данной заметки.

**Теорема 1.** *Для любой вещественной $n \times n$ матрицы $C^{[n]}$, такой, что $c_{ij} < 0$ при $i \neq j$, а $c_{ii} = -(\sum\limits_{j \neq i} c_{ij}) - f_i$, где все $f_i < 0$, справедливы следующие утверждения*

1. $detC^{[n]} > 0$
2. $C_{ij}^{[n]} > 0$, *где* $C_{ij}^{[n]}$ *– алгебраическое дополнение элемента* $c_{ij}$ *матрицы* $C^{[n]}$.

Замечание.
В случае противоположного соглашения о знаках элементов знаки всех детерминантов и алгебраических дополнений очевидно чередовались бы с изменением размерности матрицы.

*Доказательство.* Доказательство будем проводить методом математической индукции.

1. Легко проверить, что для матриц $2 \times 2$ и $3 \times 3$ утверждения верны.

2. Индукционное предположение. Пусть до некоторого $m \geq 3$ утверждение теоремы верно.

3. Индукционный переход. Докажем его для матрицы размера $t = m + 1$.

Начнем с алгебраических дополнений. Для дополнений диагональных элементов все очевидно просто по индукционному предположению, так как диагональные миноры $\bar{M}_{ii}^{[t]}$ удовлетворяют тем же условиям, что и матрицы $C^{[t-1]}$, для которых детерминант, по предположению, положителен. Докажем теперь, что алгебраические дополнения $C_{ij}^{[t]}$ внедиагональных элементов матрицы $C^{[t]}$ положительны. Очевидно, что для любого минора $\bar{M}_{ij}^{[t]}, i \neq j$, соответствующая ему матрица приводится перестановкой строк и столбцов к виду

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1\ t-1} \\ r_{21} & -l_2 - \sum\limits_{k\neq 2} r_{2\ k} & r_{23} & \dots & r_{2\ t-1} \\ r_{31} & r_{32} & -l_3 - \sum\limits_{k\neq 3} r_{3\ k} & \dots & r_{3\ t-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{t-1\ 1} & r_{t-1\ 2} & \dots & r_{t-1\ t-2} & -l_{t-1} - \sum\limits_{k\neq t-1} r_{t-1\ k} \end{pmatrix}$$

где $l_i < 0$ и по абсолютной величине не меньше чем величины $f_i$ исходной матрицы $C^{[t]}$. При этом $detR = (-1)^{p+q}\bar{M}_{ij}^{[t]}$ где $p$ и $q$ – число перестановок строк и столбцов соответственно.

Определим связь $p$ и $q$ с индексами $i$ и $j$ минора $\bar{M}_{ij}^{[t]}$. Рассмотрим два случая. Пусть для начала $j > i$, то есть вырезается наддиагональный элемент. В этом случае неположительная строка оказывается на $(j-1)$-ом месте, следовательно она окажется на первом месте после $j-2$ перестановок. Значит, $p = j-2$. Число положительных элементов, оказавшихся после перестановки строк на единицу левее диагонали, равно $i-1$. Но таких элементов быть не должно, следовательно необходимо произвести $i-1$ перестановку столбцов, то есть $q = i-1$. Получается $detR = (-1)^{i+j-3}\bar{M}_{ij}^{[t]}$. Комбинируя со знаком при миноре в определении алгебраического дополнения, получаем $C_{ij}^{[t]} = (-1)^{i+j-3}(-1)^{i+j}detR$, или $C_{ij}^{[t]} = (-1)^{2i+2j-3}detR = -detR$. Во втором случае $j < i$, и мы находим $p = j-1$ и $q = i-2$, из чего точно также следует, что $C_{ij}^{[t]} = -detR$.

Оперделим знак $detR$. Для этого разложим его по первой строке. Перестановкой $j-2$ столбцов миноры внедиагональных элементов $r_{1j}$ приводятся к тому же виду, что и сама матрица $R$, а минор элемента $r_{11}$ имеет вид $C^{[t-2]}$. Имеем

$$detR = r_{11}detC^{[t-2]} + \sum R_{1j}r_{1j},$$

где $r_{1j} < 0$, $detC^{[t-2]} > 0$, а алгебраические дополнения $R_{1j}$ являются детерминантами матриц того же типа, что и сама $R$, но на единицу меньшей размерности и с дополнительным множителем $(-1)^{1+j}(-1)^{j-2} = -1$. Однако, поскольку для $m < t$ по предположению индукции $C_{ij}^{[m]} > 0$, то все такие детерминанты отрицательны, а $R_{1j} > 0$. Следовательно, $detR^{[t]} < 0$, а потому алгебраические дополнения $C_{ij}^{[t]} > 0$.

Осталось доказать, что определитель самой матрицы $C^{[t]}$ положителен. Для этого докажем более сильное утверждение, а именно, что в разложении $detC^{[t]}$ по всевозможным произведениям положительных величин $(-f_i)$ все коэффициенты положительны. Это легко установить для матриц $2 \times 2$ и $3 \times 3$, и, в рамках рассуждения по индукции, будем предполагать это свойсто верным для всех $m < t$.

Рассмотрим две функции от элементов множества $f = \{f_i\}$

$$detC^{[t]} = \sum_{k=1}^{t} \sum_{\{z\}} L_{\{z\}} (-f_{z_1}) \cdots (-f_{z_k})$$

$$F(f) = \sum_{k=1}^{t} (-f_k) C_{kk}^{[t]} = \sum_{k=1}^{t} \sum_{\{z\}} D_{\{z\}} (-f_{z_1}) \cdots (-f_{z_k})$$

где последние суммирования производятся по всевозможным наборам номеров элементов множества $f$ без повторений, а равенства служат определением коэффициентов $L_{\{z\}}$ и $D_{\{z\}}$. Заметим, что слагаемое с $k = 0$ в детерминанте отсутствует, поскольку детерминант генератора Марковского процесса при равных нулю сдвигах обращается в ноль.

Докажем справедливость соотношения

$$D_{\{z\}} = kL_{\{z\}},$$

где $k$ – мощность выбранного подмножества. Можно просто сравнить производные по параметрам $f$ в нуле от этих двух полиномов. Но проще заметить, что утверждаемое соотношение эквивалентно равенству $F = \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial f_i} detC^{[t]}$, которое в свою очередь следует из элементарного тождества

$$\frac{\partial}{\partial f_i} detC^{[t]} = -\frac{\partial}{\partial c_{ii}} detC^{[t]} = -C_{ii}^{[t]}.$$

Из полученного соотношения между $L_{\{z\}}$ и $D_{\{z\}}$ следует, что достаточно проверить знаки коэффициентов полинома $F(f)$. А они легко находятся из определения $F(f)$ и индукционного предположения. В самом деле, по предположению индукции $C_{kk}^{[t-1]}$ раскладываются в ряд по положительным величинам $-\tilde{f}_i$, $i = 1, \cdots, t-1$, с положительными коэффициентами. При этом $-\tilde{f}_i = -f_i - c_{ik}^{[t]} > -f_i$ для $i < k$ и $-\tilde{f}_i = -f_{i+1} - c_{i+1\ k}^{[t]} > -f_{i+1}$ для $i \geq k$. Это рассуждение завершает доказательство теоремы. □

Непосредственным следствием доказанного утверждения является положительность всех элементов матрицы, обратной к $C^{[t]}$, поскольку они получаются делением алгебраических дополнений на детерминант.

Можно также проверить, что замена неравенства $c_{ij} < 0$ при $i \neq j$ на нестрогое приводит к тому, что внедиагональные элементы обратной матрицы могут обращаться в нуль, но остаются неотрицательными. Кроме того, как видно из разложения $\left(C^{[n]}\right)^{-1}$ в матричный в ряд, данное следствие распространяется и на бесконечномерные матрицы $C^{[\infty]}$ конечной операторной $l_1$-нормы, хотя в силу очевидных сложностей этого и нельзя установить путем элементарных выкладок с детерминантами и алгебраическими дополнениями (см. также [7]).

## Литература

1. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. М. ФизМатЛит 2003

2. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. Изд. Иностр.Литературы, Москва 1962.

3. Ф. Клемент, Х. Хейманс и др. Однопараметрические полугруппы. М. Мир 1992

4. Goldschtein J.A. Semigroups of linear operators and applications. Oxford Mathematical Monographs. New York: Oxford University Press; Oxford: Clarendon Press. X 1985.

5. Ланкастер П. Теория матриц. Москва, Наука 1982 Moskva: "Nauka". 269 p. R. 1.40 (1982).

6. Gerschgorin S.A. Ьber die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix. Bull. Acad. Sc. Leningrad 1931, 749-754 (1931).

7. Е. В. Головнева, Об эргодических свойствах однородной марковской цепи, Владикавк. матем. журн., 14:1 (2012), 37–46.

**Summary**

**Golovneva E. V.** A class of matrices with diagonall domination

The article is devoted to a special class of real valued matrices with diagonal domination. This class is of considerable importance for the theory of homogeneous Markov processes with continuous time and discrete state space.

*Keywords: determinant, Markov process.*

*Институт эволюционной физиологии и биохимии им. И.М.Сеченова РАН*
*Поступила 03.04.2012*