Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.15.2012

УДК 513.88

О МОДУЛЯРАХ МАЦИНКЕВИЧА НА $[0,1]$ И НА $[0,\infty)$

А. А. Меклер

Случай пространств Марцинкевича (Лоренца, Орлича) функций, заданных на $[0,\infty)$, и случай этих же пространств функций, заданных на $[0,1]$, можно свести один к другому. Рассмотрена экстремальная постановка задачи о p-выпуклости пространств Марцинкевича.
Библиогр. 6 назв.
Ключевые слова: симметрические модуляры Марцинкевича, эквивогнутые псевдостепенные функции.

§1. Введение

В литературе, посвящённой изучению банаховых пространств измеримых функций, в частности, *пространств Лоренца, Марцинкевича и Орлича*, каждое из них определяется с помощью вещественной *нормирующей функции*, которая может быть задана на отрезке $[0,1]$, где имеет одну особенность - в 0, а иногда, будучи задана на $[0,\infty)$, может иметь их две - в 0 и на ∞, ср., например, [3] и [1]. Под действием оператора сжатия/растяжения, т.е. оператора умножения аргумента функций из пространства на положительный скаляр, в пространстве может измениться геометрия единичной сферы, но не меняется состав элементов и тем самым - топология этого пространства. Динамика этой инвариантности в зависимости от задающего сжатие/растяжение скаляра является критичной для ряда важных свойств изучаемого пространства, например, определяемых его индексами Бойда (см., например, [3]), а также и иных. При её изучении целесообразно факторизовать нормирующие функции, считая *мультипликативно* (коротко, $\overset{m}{\sim}$*)эквивалентными* такие две функции, подходящие сжатия/растяжения которых вдоль каждой из осей взаимно мажорируют друг друга. Классы $\overset{m}{\sim}$эквивалентности называются *модулярами*, [5]- [6] (см. также [2]); в частности, индексы

Бойда внутри модуляры не меняются.

В [5]- [6] показано, что при таком подходе к изучению указанных выше трёх видов пространств достаточно ограничиться пространствами Марцинкевича и, стало быть, *модулярами Марцинкевича* (коротко, *M-модулярами*). Под ними мы понимаем модуляры, содержащие в своём составе хотя бы одну *M-функцию*, т.е. вогнутую нормирурующую функцию, которая иногда рассматривается заданной на $[0, \infty)$, а иногда - на $[0, 1]$; при этом функции из M-модуляр мы называем *эквивогнутыми.* Нас интересует прежде всего вопрос о том, как разнятся в этих двух случаях M-инварианты, - топологические инварианты соответствующих пространств Марцинкевича. Оказывается возможным второй случай "погрузить"в первый, выделив подслучай *симметрических* функций, т.е. эквивогнутых функций, заданных на $[0, \infty)$, но полностью определённых своими значениями на отрезке $[0, 1]$. Любая эквивогнутая функция на $[0, \infty)$ может быть представлена как пара симметрических (мы называем её *симметрическими скобками* данной функции): левая скобка соответствует ветви исходной функции на $[0, 1]$, а правая - на $[1, \infty)$. Таким образом любому M-инварианту пространства Марцинкевича $M(0, \infty)$ можно сопоставить пару M-инвариантов пространства $M(0, 1)$, и наоборот. Для симметрических M-модуляр инварианты в этой паре совпадают.

Второй интересующий нас вопрос связан с проблематикой *p-выпуклости* банаховых пространств измеримых функций. Пусть φ - заданная на $[0, \infty)$ эквивогнутая нормирующая функция, ψ - её левая симметрическая скобка, а δ_ψ верхний индекс сжатия/растяжения. Известно, [3], что для $1 < p \neq \frac{1}{\delta_\psi}$ пространство Марцинкевича $M_\psi([0, 1])$ является p-выпуклым (и, стало быть, пространство Лоренца $\Lambda_{\psi_*}([0, 1])$ является q-вогнутым, $1/p + 1/q = 1$), тогда и только тогда, когда $p < \frac{1}{\delta_\psi}$. Это равносильно утверждению (см. Лемму 5.1), что для эквивогнутой функции ψ и для $1 < p \neq \frac{1}{\delta_\psi}$ степень ψ^p является эквивогнутой, тогда и только тогда, когда $p < \frac{1}{\delta_\psi}$. В доказанных здесь Теоремах 5.7 и 5.9 характеризуется M-инвариант, заключающийся в том, что предельная степень $\frac{1}{\delta_\psi}$ тоже оставляет ψ эквивогнутой. Мы называем такие эквивогнутые функции *псевдостепенными* (в [5], [6] они назывались экстремальными). В Теореме 5.9 доказано, что выполнение этого инварианта для симметрической функции ψ равносильно тому, что *супремальная* и *верхнепредельная* функции сжатия/растяжения, вычисленные для ψ, обе $\overset{m}{\sim}$эквивалентны на бесконечности степенной функции s^{δ_ψ}.

В работах [4]- [6], см. также [2], с. 480 - 482, была использована прозрачная интерпретация параллелизма, существующего между инвариантами функциональных пространств двух различных типов, - Орлича и Марцинкевича (а с последним и Лоренца), - в терминах так называемых *натуральных баз.* Она оказалась удобной и в этой работе, как в общей схеме задания эквивогнутых функций на полуоси и на отрезке, так и для формулировки прозрачных критериев свойства этих функций быть псевдостепенными.

Настоящая работа состоит из пяти параграфов, включая введение. Для удобства чтения приведены некоторые определения и основные свойства объектов из работ автора [4]- [6] и отмечены редкие случаи модификации "рабочей" терминологии и обозначений этих статей. Доказательства во многом опираются на определения и результаты § 1, гл. II, [1]; простые утверждения приводятся без доказательств.

§2. Натуральные базы

Определение 2.1. 1. $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ обозначает множество всех подмножеств натурального ряда $\mathbb{N}$. Множество $K \in \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ будем называть *бииинфинитным*, если и оно само, и его дополнение $\mathbb{N}\setminus K$ суть бесконечные подмножества $\mathbb{N}$
(в [6] такое подмножество называлось нетривиальным).

2. Любую строго возрастающую последовательность целых неотрицательных чисел вида $b = \{b_k\}_{0\le k<\infty}$, где $b_0 = 0$, будем называть *(натуральной) базой*, если $\{b_k\}_{1\le k<\infty}$ биинфинитное подмножество в $\mathbb{N}$. Обозначим через $\mathfrak{b}$ множество всех баз. Для базы $b = \{b_k\}_{k\ge 0}$ подмножество $\mathbb{N}\setminus\{b_k\}_{k\ge1} := \{b_{*i}\}_{i\ge1}$ натурального ряда, занумерованное в строго возрастающую последовательность и дополненное начальным нулём, мы называем *двойственной с* b базой и обозначаем b_*, $b_* = \{b_{*i}\}_{0\le i<\infty}$. Очевидно, что двойственность есть инволюция в классе $\mathfrak{b}$.

3. По заданной базе b определим два отображения $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$: *количественную последовательность*

$$q_b(n) := (b_n - b_{n-1}) > 0,\ n \in \mathbb{N}, \tag{2.1}$$

и *плейс-последовательность* (в [6]- сюръективная последовательность)

$$p_b(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \chi_b(i),\ n \in \mathbb{N}, \tag{2.2}$$

где χ_b обозначает индикаторную функцию подмножества $b \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ясно, что

$$p_b(1) = 1,\ p_b(n) \le p_b(n+1) \le p_b(n) + 1,\ n \ge 1;\ \lim_{n\to\infty} p_b(n) = \infty. \tag{2.3}$$

Замечание 2.1. Каждый из трёх объектов - база, её количественная и её плейс-последовательность, - очевидным образом определён любым из них, в том смысле, что, исходя из него, формулами (2.1) - (2.3) однозначно восстанавливаются остальные два.

Определение 2.2. *Суперпозицией* $b_1 \circ b_2$ назовём базу, восстановленную по плейс-последовательности $p_{b_1} \circ p_{b_2} := p_{b_1}(p_{b_2}(j)),\ j \ge 1$.

Определение 2.3. 1. Для двух последовательностей вещественных чисел $q^{(1)} = \{q_n^{(1)}\}_{n\ge1}$ и $q^{(2)} = \{q_n^{(2)}\}_{n\ge1}$ будем писать $q^{(1)} \overset{a}{\sim} q^{(2)})$ и называть их $\overset{a}{\sim}$*эквивалентными* (т.е. аддитивно эквивалентными), если найдётся такое натуральное d, что $\sum_{i=1}^{n} q_i^{(1)} \le \sum_{i=1}^{n+d} q_i^{(2)} \le \sum_{i=1}^{n+2d} q_i^{(1)},\ n \ge 1$.

2. Базу $b^{(1)}$ будем называть $\overset{a}{\sim}$эквивалентной базе $b^{(2)}$ (пишем $b^1 \overset{a}{\sim} b^2$), если найдётся натуральное d, такое что $b_k^{(1)} \le b_{k+d}^{(2)} \le b_{k+2d}^{(1)},\ k \ge 1$. Совокупность всех $\overset{a}{\sim}$эквивалентных между собой баз будем называть $\overset{a}{\sim}$модулярой.

3. Пусть каждая из двух натуральных последовательностей $p^{(1)} = \{p_n^{(1)}\}_{n\ge1}$ и $p^{(2)} = \{p_n^{(2)}\}_{n\ge1}$ удовлетворяют условиям (2.3). Последовательности $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$ называются $\overset{a}{\sim}$эквивалентными (обозначение: $p^{(1)} \overset{a}{\sim} p^{(2)}$), если найдётся натуральное d, такое что $p_n^{(1)} \le p_n^{(2)} + d \le p_n^{(1)} + 2d,\ n \ge 1$.

Для двойственной базы b_* обозначим через $\{q_{b_*}\}$ и $\{p_{b_*}\}$, соответственно, количественную и плейс-последовательности для b_*. Отметим очевидную формулу $p_{b_*}(n) = n - p_b(n) + 1,\ n \ge 1$. Столь же очевидной являтся и

Лемма 2.2. Для любых двух баз $b^{(1)}$ и $b^{(2)}$ все приведенные ниже $\overset{a}{\sim}$эквивалентности попарно равносильны:

$$b^{(1)} \overset{a}{\sim} b^{(2)};\ b^{(1)}_* \overset{a}{\sim} b^{(2)}_*;\ q_{b^{(1)}} \overset{a}{\sim} q_{b^{(2)}};\ q_{b^{(1)}_*} \overset{a}{\sim} q_{b^{(2)}_*};\ p_{b^{(1)}} \overset{a}{\sim} p_{b^{(2)}};\ p_{b^{(1)}_*} \overset{a}{\sim} p_{b^{(2)}_*}. \tag{2.4}$$

Определение 2.4. 1. Отображение $\omega : \mathfrak{b} \to \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ мы называем $\overset{a}{\sim}$*инвариантным*, если на $\overset{a}{\sim}$эквивалентных базах ω имеет $\overset{a}{\sim}$эквивалентные значения.

2. Пусть $b = \{b_k\}_{0\le k<\infty}$ - база, введём для неё *супремальную последовательность* $S_b(m) := \sup_{0\le n<\infty} \sum\limits_{j=n+1}^{n+m} \chi_b(j),\ m \ge 0$, и *верхнепредельную последовательность* $L_b(m) := \limsup_{n\to\infty} \sum\limits_{j=n+1}^{n+m} \chi_b(j),\ m \ge 0$. Ясно, что

$$L_b(m) \le S_b(m) \le m,\ m \ge 1. \tag{2.5}$$

Замечание 2.3. Очевидно, что $\{S_b(m)\}$ удовлетворяет соотношениям (2.3), а $\{L_b(m)\}$ - первому из них. По Замечанию 2.1 значения $\{S_b(m)\}$ восстанавливают базу b_{S_b}; по Лемме 2.2 отображение $b \to b_{S_b}$ $\overset{a}{\sim}$инвариантно. Аналогично, если монотонная последовательность $\{L_b(m)\}$ неограничена, то её значения восстанавливают базу b_{L_b}, причём $b \to b_{L_b}$ $\overset{a}{\sim}$инвариантное отображение.

Лемма 2.4. Пусть b натуральная база, $\tilde{b} \overset{a}{\sim} b$. Предположим, что найдётся строго возрастающая натуральная подпоследовательность $\{i_n\}$, такая что $\lim_{n\to\infty} q_{\tilde{b}}(i_n) = \mu < \infty$. Тогда $L_b(m)$ неограничена.

Доказательство. Из определений следует, что $\overset{a}{\sim}$эквивалентные базы имеют $\overset{a}{\sim}$эквивалентные верхнепредельные последовательности, так что свойство неограниченности последних $\overset{a}{\sim}$инвариантно. В силу конечности натурального μ, начиная с некоторого места, скажем с M, выполняется: $q_{\tilde{b}}(i_n) = b_{i_n} - b_{i_n-1} = \mu \ge 1,\ n \ge M$. Поэтому, если взять любое $N \in \mathbb{N}$, то на промежутке $[\tilde{b}_{i_M-1}, \tilde{b}_{i_{NM}}]$ натурального ряда содержится не менее $N \cdot \mu$ элементов базы $\tilde{b}$, откуда следует, что $\lim_{N\to\infty} L_{\tilde{b}}(\tilde{b}_{i_{NM}} - \tilde{b}_{i_M-1}) \ge \lim_{N\to\infty} N \cdot \mu = \infty$. $\square$

Лемма 2.4 может быть сформулирована как

Теорема 2.5. Верхнепредельная последовательность $L_b(m)$ ограничена по m, тогда и только тогда, когда найдётся натуральная база $\tilde{b} \overset{a}{\sim} b$,

для которой
$$\lim_{n\to\infty} q_{\tilde{b}}(n) = \infty. \tag{2.6}$$

Определение 2.5. *Нижним* (соответственно, *верхним*) *индексом* базы $b = \{b_k\}_{k\geq 0}$ будем называть числа
$$\begin{cases} \gamma_b := \lim_{m\to\infty} \inf\limits_{0\leq n<\infty} \dfrac{\sum\limits_{j=n+1}^{n+m} \chi_b(j)}{m}; \\ \delta_b := \lim_{m\to\infty} \sup\limits_{0\leq n<\infty} \dfrac{\sum\limits_{j=n+1}^{n+m} \chi_b(j)}{m}. \end{cases} \tag{2.7}$$

Ясно, что эти числа существуют, что $0 \leq \gamma_b \leq \delta_b \leq 1$ и что для двух $\overset{a}{\sim}$эквивалентных баз их соответственные индексы попарно совпадают. Легко видеть также, что справедливы равенства $\delta_b = 1-\gamma_{b_*}$; $\gamma_b = 1-\delta_{b_*}$.

§3. Нормирующие функции и модуляры Марцинкевича

В дальнейшем приняты обычные обозначения $\frac{0}{0} := 0\cdot\infty := 0$; $\frac{1}{0} := \infty$.

Определение 3.1. Две вещественные функции f_1 и f_2, определённые на $[0,\infty)$, называются *мультипликативно эквивалентными* (обозначение: $f_1 \overset{m}{\sim} f_2$), если для подходящей константы $C \geq 1$ выполняются неравенства
$$C^{-1}F_2(C\cdot t) \leq F_1(t) \leq C\cdot F_2(C^{-1}\cdot t),\ t\in[0,\infty). \tag{3.1}$$

Определение 3.2. 1. Вещественную функцию, заданную на $[0,\infty)$, непрерывную и равную нулю (или доопределённую нулём) в нуле, а вне нуля - положительную, неубывающую и стремящуюся к бесконечности на бесконечности, мы называем *нормирующей.*

2. Класс $\overset{m}{\sim}$эквивалентности нормирующих функций мы называем $\overset{m}{\sim}$*модулярой*; $\overset{m}{\sim}$модуляру $\mathcal{E}$ функции $e(t) = t,\ 0\leq t<\infty$ мы называем *несобственной*, прочие же - *собственными*, и рассматриваем ниже только их.

3. $\overset{m}{\sim}$модуляру, содержащую какую-либо *вогнутую* нормирующую функцию ψ, удовлетворяющую равенству $\psi(1) = 1$, мы называем *модулярой Марцинкевича* или M*-модулярой*, а саму ψ - M*-функцией*; функции из M-модуляры называются *эквивогнутыми.* Если ψ M-функция,

то функция $\psi_*(t) := \frac{t}{\psi(t)},\ 0 < t < \infty$, является нормирующей функцией, вообще говоря, не вогнутой, но эквивогнутой. Её наименьшую вогнутую мажоранту, [1], мы, не опасаясь путаницы, обозначаем также через ψ_* и называем функцию ψ_* и её модуляру *двойственными* к ψ и её модуляре, соответственно.
Ясно, что в классе M-модуляр двойственность, как и отображение

$$\varphi(t) \to \hat{\varphi}(t) := \frac{1}{\varphi(\frac{1}{t})},\ t \in (0,\infty),$$

есть инволюция.

Предположим, что ξ_1 и ξ_2 две эквивогнутые функции, причём $\xi_1(1) = \xi_2(1) = 1$. Рассмотрим на $[0,\infty)$ их *склейку*, т.е. такую функцию φ, обозначаемую $\varphi := \xi_1|_{[0,1]} \oplus \xi_2|_{[1,\infty)}$, сужения которой на $[0,1]$ и на $[1,\infty)$ совпадают там с ξ_1 и ξ_2, соответственно. Из критерия Теоремы 1.1, [1], вытекает

Лемма 3.1. Склейка является эквивогнутой функцией.

На полуоси для заданной нормирующей функции ξ определены три вида *супремальных* функций сжатия/растяжения, ср. [1], а также соответственные - *нижний* γ и *верхний* δ *индексы сжатия/растяжения*:

$$\begin{cases} \mathfrak{S}_\xi(s) := \sup_{t\in[0,\infty)} \frac{\xi(s\cdot t)}{\xi(t)},\ 0 \le s < \infty;\ \gamma_\xi := \lim_{s\to 0} \frac{\log_2 \mathfrak{S}_\psi(s)}{\log_2 s};\ \delta_\xi := \lim_{s\to\infty} \frac{\log_2 \mathfrak{S}_\xi(s)}{\log_2 s}, \\ \mathfrak{S}^0_\xi(s) := \sup_{t\in[0,1]: s\cdot t\in[0,1]} \frac{\xi(s\cdot t)}{\xi(t)},\ 0 \le s < \infty;\ \gamma^0_\xi := \lim_{s\to 0} \frac{\log_2 \mathfrak{S}^0_\xi(s)}{\log_2 s}; \delta^0_\xi := \lim_{s\to\infty} \frac{\log_2 \mathfrak{S}^0_\xi(s)}{\log_2 s}; \\ \mathfrak{S}^\infty_\xi(s) := \sup_{t\ge 1,\ s\cdot t\ge 1} \frac{\xi(s\cdot t)}{\xi(t)},\ \ 0 \le s < \infty;\ \gamma^\infty_\xi := \lim_{s\to 0} \frac{\log_2 \mathfrak{S}^\infty_\xi(s)}{\log_2 s};\ \delta^\infty_\xi := \lim_{s\to\infty} \frac{\log_2 \mathfrak{S}^\infty_\xi(s)}{\log_2 s}, \end{cases} \tag{3.2}$$

Для ξ определены также две *верхнепредельные* функции:

$$\mathfrak{L}^0_\xi(s) := \limsup_{t\to 0} \frac{\xi(s\cdot t)}{\xi(t)},\ 0 \le s < \infty;\ \mathfrak{L}^\infty_\xi(s) := \limsup_{t\to\infty} \frac{\xi(s\cdot t)}{\xi(t)},\ 0 \le s < \infty. \tag{3.3}$$

Лемма 3.2, см. также [1] (где $\mathfrak{S}_\xi$ обозначается как $M_\xi(s)$). Для M-функции $\psi(s),\ 0 \le s < \infty$, и для любого $\alpha \in (0,1]$ на полуоси выполняются равенства

$$\mathfrak{S}_{\psi_*}(s) = s\mathfrak{S}_\psi(\frac{1}{s});\ \mathfrak{S}_{\psi^\alpha}(s) = (\mathfrak{S}_\psi)^\alpha(s);\ \mathfrak{L}^\infty_{\psi^\alpha}(s) = (\mathfrak{L}^\infty_\psi(s))^\alpha(s);\ \delta_{(\psi)^\alpha} = \alpha\cdot\delta_{(\psi)}, \tag{3.4}$$

и аналогично для $\mathfrak{S}^0_{\psi_*}(s),\ \mathfrak{S}^\infty_{\psi_*}(s),\ \mathfrak{L}^0_{\psi_*}(s),\ \mathfrak{L}^\infty_{\psi_*}(s),\ \delta^0,\ \delta^\infty$.

Следствие 3.3. Для эквивогнутой функции ξ функции в левых частях равенств (3.2)-(3.4) также эквивогнуты. Действительно, они неубывают и стремятся к бесконечности на бесконечности, а с другой стороны функции $\frac{\mathfrak{S}_{\psi}(s)}{s}$, $\frac{\mathfrak{S}^0_{\psi_*}(s)}{s}$ и $\frac{\mathfrak{S}^{\infty}_{\psi_*}(s)}{s}$ не возрастают и неограничены в нуле. Поэтому эквивогнутость этих функций на полуоси $[0,\infty)$ вытекает из теоремы 1.1, [1]. Более того, эти функции, как легко видеть, m-инвариантны, то есть, будучи вычисленными для каждой из двух $\overset{m}{\sim}$эквивалентных M-функций они оказываются попарно $\overset{m}{\sim}$эквивалентными, а их индексы сжатия/растяжения - попарно равными.

Замечание 3.4. Справедливы формулы (см. также [1])

$$\delta_{\psi}=1-\gamma_{\psi_*},\gamma_{\psi}=1-\delta_{\psi_*};\gamma^0_{\psi}=1-\delta^0_{\psi_*},\delta^0_{\psi}=1-\gamma^0_{\psi_*};\gamma^{\infty}_{\psi}=1-\delta^{\infty}_{\psi_*},\delta^{\infty}_{\psi}=1-\gamma^{\infty}_{\psi_*}. \tag{3.5}$$

Определение 3.3. Эквивогнутую функцию φ мы называем *симметрической*, если выполняется $\overset{m}{\sim}$ эквивалентность

$$\varphi(t)\overset{m}{\sim}\hat{\varphi}(t),\ t\in[0,\infty). \tag{3.6}$$

При этом M-модуляра $\Phi\ni\varphi$ тоже называется *симметрической.*

Для M-функции ξ положим

$$\begin{cases}\xi^0(t)=\xi(t),\ \text{если } t\in[0,1],\ \xi^0(t)=\hat{\xi}(t),\ \text{если } t\in[1,\infty);\\ \xi^{\infty}(t)=\hat{\xi}(t),\ \text{если } t\in(0,1],\ \xi^{\infty}(t)=\xi(t),\ \text{если } t\in[1,\infty).\end{cases} \tag{3.7}$$

По лемме 3.1 обе эти функции являются симметрическими. Мы называем ξ^0 *левой*, а ξ^{∞} *правой симметрическими скобками* для ξ. С помощью $\overset{m}{\sim}$эквивалентности эти понятия переносятся на любые эквивогнутые функции.

§4. Базы и эквивогнутые функции

Определение 4.1. Зафиксируем две произвольные натуральные базы $b^0=\{n^0_k\}_{k=0,1,\dots}$ и $b^{\infty}=\{n^{\infty}_k\}_{k=0,1,\dots}$. Возьмём любое целое неотрицательное число j и найдём два числа $k_0(j)$ и $k_{\infty}(j)$, такие что $n^0_{k_0(j)}\le j<n^0_{k_0(j)}+1,\ n^{\infty}_{k_{\infty}(j)}\le j<n^{\infty}_{k_{\infty}(j)}+1.$

Построим две функции - φ^0 на $[0,1)$ и φ^{∞} на $[1,\infty)$, - как двоичноизмеримые функции, т.е. измеримые относительно разбиения промежутка $[0,1)$ точками вида $2^{-\nu}$ и, соответственно, разбиения промежутка

$[1,\infty)$ точками вида 2^ν, где $\nu = 0,1,2,\dots$. Если $2^{-j} \le t < 2^{-j+1}$, $j \ge 1$, то полагаем $\varphi^0(t) = 2^{-n^0_{k_0(j)}}$, а если $2^j \le t < 2^{j+1}$, $j \ge 0$, то полагаем $\varphi^\infty(t) = 2^{n^\infty_{k_\infty(j)}}$.

Пусть $\varphi(t) = \varphi^0(t)$ при $t \in [0,1)$ и $\varphi(t) = \varphi^\infty(t)$ при $t \in [1,\infty)$. Легко проверить, что для двоично-измеримой функции (мы обозначаем её также φ), построенной процедурой склейки, выполняются все условия Леммы 3.1, согласно которой φ является эквивогнутой функцией; мы называем φ *порождённой парой натуральных баз* (b^0, b^∞), причём b^0 (b^∞) называем *левой* (соответственно, *правой*) базой для φ.

Покажем, что верно и обратное: любая M-функция ψ (и, следовательно, любая эквивогнутая функция) однозначно с точностью до $\overset{m}{\sim}$эквивалентности порождается парой натуральных баз с помощью описанной выше конструкции.

Определение 4.2. 1. Пусть M-функция ψ, задана на полуоси $[0,\infty)$. Для натуральных n обозначим через D_n^- диадический полусегмент $[2^{-n}, 2^{-n+1})$, через D_n^+ диадический полусегмент $[2^n, 2^{n+1})$, а для всех целых j точки вида $\psi(2^j)$ будем называть $\psi-$точками. Введём две функции p^0_ψ и p^∞_ψ, называемые *плейс–последовательностями* M*-функции* ψ *в нуле и на бесконечности,* соответственно, (в [5] - сюръективные последовательности) сопоставляя каждой ψ-точке номер диадического полусегмента D, её содержащего:

$$p^0_\psi(j) = [-\log_2 \psi(2^{-j})],\ p^\infty_\psi(j) = [\log_2 \psi(2^j)],\ j \ge 0, \tag{4.1}$$

где $[r]$ обозначает целую часть действительного числа r. Ясно, что для M-функции ψ обе функции $p^0_\psi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ и $p^\infty_\psi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ суть сюръективные отображения, каждое из которых удовлетворяет соотношениям (2.3); тем самым они определяют базы b^0_ψ и b^∞_ψ, плейс–последовательностями которых являются. Эти базы, как легко убедиться, соответствуют левой и правой базам некоторой эквивогнутой функции, $\overset{m}{\sim}$эквивалентной ψ. Количественные последовательности этих баз мы обозначаем, соответственно, $q^0_\psi(n)$ и $q^\infty_\psi(n)$.

Замечание 4.1. Очевидно, что соответственные базы двух M-функций попарно $\overset{a}{\sim}$эквивалентны, тогда и только тогда, когда сами эти функции $\overset{m}{\sim}$эквивалентны. Поэтому мы можем определить левую и правую базы эквивогнутой функции с точностью до $\overset{a}{\sim}$эквивалентности, как соответственные базы любой M-функции из её M-модуляры. Иными словами можно считать, что $\overset{m}{\sim}$модуляры эквивогнутых функций и пары $\overset{a}{\sim}$модуляр баз поставлены во взаимно-однозначное соответствие, которое можно записать как $b_{\varphi_b} \overset{a}{\sim} b$, $\varphi_{b_\varphi} \overset{m}{\sim} \varphi$ (понимая под b пару баз). Ясно, что это соответствие сохраняет двойственность в классах $\overset{m}{\sim}$-модуляр и пар $\overset{a}{\sim}$модуляр.

Лемма 4.2. Эквивогнутая функция φ симметрическая, тогда и только тогда, когда её левая и правая базы $\overset{a}{\sim}$ эквивалентны: $b^\infty_\varphi \overset{a}{\sim} b^0_\varphi$.

Замечание 4.3. Для симметрической эквивогнутой функции φ двойственная ей эквивогнутая функция φ_* тоже симметрическая.

Лемма 4.4. Пусть p^0_ψ - плейс-последовательность левой базы b^0_ψ M-функции ψ. Пусть $\mathfrak{S}^0_\psi$ определена на полуоси формулами (3.2) и пусть $p^0_{\mathfrak{S}^0_\psi}$ и $p^\infty_{\mathfrak{S}^0_\psi}$ обозначают плейс-последовательности левой $b^0_{\mathfrak{S}^0_\psi}$ и правой $b^\infty_{\mathfrak{S}^0_\psi}$ баз, соответственно, для M-функции $\mathfrak{S}^0_\psi$. Тогда

$$\left\{\begin{array}{r} p^\infty_{\mathfrak{S}^0_\psi}(m) \overset{a}{\sim} \sup_{n\ge 0}\Big(p^0_\psi(n+m)-p^0_\psi(n)\Big) \overset{a}{\sim} \sup_{n\ge 0}\Big(\sum_{j=n+1}^{n+m}\chi_{b^0_\psi}(j)\Big) = S_{b^0_\psi}(m); \\ p^0_{\mathfrak{S}^0_\psi}(m) \overset{a}{\sim} \inf_{n\ge 0}\Big(p^0_\psi(n+m)-p^0_\psi(n)\Big) \overset{a}{\sim} \inf_{n\ge 0}\Big(\sum_{j=n+1}^{n+m}\chi_{b^0_\psi}(j)\Big). \end{array}\right. \quad m\ge 0. \qquad (4.2)$$

Доказательство.

$$\log_2 \mathfrak{S}^0_\psi(2^m) \overset{m}{\sim} \sup_{n\ge 0,\ n\ge m}\Big(p^0_\psi(n)-p^0_\psi(n-m)\Big) = \sup_{k+m\ge 0,\ k\ge 0}\Big(p^0_\psi(k+m)-p^0_\psi(k)\Big).$$

Для вычисленной по формулам (4.1) правой плейс-последовательности $p^\infty_{\mathfrak{S}^0_\psi}$ M-функции $\mathfrak{S}^0_\psi$ это влечёт соотношения

$$p^\infty_{\mathfrak{S}^0_\psi}(m) \overset{a}{\sim} \left\{\begin{array}{r} 0 \text{ при } m\le 0; \\ \sup_{k\ge 0}\Big(p^0_\psi(k+m)-p^0_\psi(k)\Big) \text{ при } m>0, \end{array}\right. \qquad (4.3)$$

а для её левой плейс-последовательности - соотношения

$$p^0_{\mathfrak{S}^0_\psi}(m) \overset{a}{\sim} \left\{\begin{array}{r} 0 \text{ при } m\ge 0; \\ \inf_{k\ge 0}\Big(p^0_\psi(k)-p^0_\psi(k+m)\Big) \text{ при } m<0. \end{array}\right. \qquad (4.4)$$

что равносильно (4.2). $\square$

Лемма 4.5. Пусть ψ обозначает M-функцию, b^0_ψ (b^∞_ψ) - её левую (соответственнно, правую) базу. Допустим, что каждая из функций $L_{b^0_\psi}(m)$ и $L_{b^\infty_\psi}(m)$ неограничена по m (см. Теорему 2.5). Тогда для плейс-последовательности $p^0_{\mathfrak{L}^0_\psi}(m)$ левой базы $b^0_{\mathfrak{L}^0_\psi}$ и для плейс-последовательности $p^\infty_{\mathfrak{L}^\infty_\psi}(m)$ правой базы $b^\infty_{\mathfrak{L}^\infty_\psi}$ выполняются эквивалентности

$$p^\infty_{\mathfrak{L}^\infty_\psi}(m) \overset{a}{\sim} \limsup_{n\to\infty}\sum_{j=n+1}^{n+m} \chi_{b^\infty_\psi}(j) = L_{b^\infty_\psi}(m); p^0_{\mathfrak{L}^0_\psi}(m) \overset{a}{\sim} \liminf_{n\to\infty}\sum_{j=n+1}^{n+m} \chi_{b^0_\psi}(j), m\ge 0. \tag{4.5}$$

Доказательство первой эквивалентности в (4.5) аналогично (4.2):

$$p^\infty_{\mathfrak{L}^\infty_\psi}(m) = [\limsup_{n\to\infty}(\log_2 \frac{\psi(2^{m+n})}{\psi(2^n)})] = [\limsup_{n\to\infty} \log_2\psi(2^{m+n}) - \log_2\psi(2^n)] \overset{a}{\sim}$$

$$\overset{a}{\sim} \limsup_{n\to\infty}([\log_2(\psi(2^{m+n})] - [\log_2\psi(2^n)]) = \limsup_{n\to\infty}(p^\infty_\psi(m+n) - p^\infty_\psi(n)) =$$

$$= \limsup_{n\to\infty}\sum_{j=n+1}^{n+m} \chi_{b^\infty_\psi}(j) = L_{b^\infty_\psi}(m),\ m\ge 0.$$

Вторая эквивалентность в (4.5) доказывается также аналогично (4.2). $\square$

Лемма 4.6. Пусть $\varphi(s),\ 0\le s<\infty$, обозначает симметрическую M-функцию, $b^0_\varphi,\ b^\infty_\varphi$ - её левую и правую баззы, $b^0_\varphi \overset{a}{\sim} b^\infty_\varphi$, а функции $\mathfrak{S}_\varphi(s),\ \mathfrak{S}^0_\varphi(s)$ и $\mathfrak{S}^\infty_\varphi(s)$ определены на полуоси $[0,\infty)$ формулами (3.2). Справедливо

$$\mathfrak{S}_\varphi(s) \overset{m}{\sim} \mathfrak{S}^0_\varphi(s) \overset{m}{\sim} \mathfrak{S}^\infty_\varphi(s),\ s\ge 0. \tag{4.6}$$

Доказательство. Вторая эквивалентность вытекает из эквивалентности её левой и правой частей. Докажем первую. Обозначим через φ^0 и φ^∞ сужения φ на $[0,1]$ и $[1,\infty)$, соответственно, и пусть $b_{\varphi^0} := \{n_k\}$. Вычислим $\mathfrak{S}_\varphi(2^{-m}),\ m\ge 0$. Для симметрической φ, согласно (3.2), имеем:

$$\mathfrak{S}_\varphi(2^{-m}) \overset{m}{\sim} \sup_{-\infty<\nu<\infty}\frac{\varphi(2^{\nu-m})}{\varphi(2^\nu)} = \sup_{\nu\le m}\frac{\varphi(2^{\nu-m})}{\varphi(2^\nu)} \vee \sup_{\nu>m}\frac{\varphi(2^{\nu-m})}{\varphi(2^\nu)} =$$

$$= \sup_{\nu\le 0}\frac{\varphi(2^{\nu-m})}{\varphi(2^\nu)} \vee \sup_{0<\nu\le m}\frac{\varphi(2^{\nu-m})}{\varphi(2^\nu)} \vee \sup_{\nu>m}\frac{\varphi(2^{\nu-m})}{\varphi(2^\nu)} =$$

$$= \sup_{\nu\le 0}\frac{\varphi^0(2^{\nu-m})}{\varphi^0(2^\nu)} \vee \sup_{0\le\nu\le m}\varphi^0(2^{\nu-m})\varphi^0(2^{-\nu}) \vee \sup_{\nu>m}\frac{\varphi^0(2^{-\nu})}{\varphi^0(2^{m-\nu})} \tag{4.7}$$

Из формул (4.1) следуют три возможности:

1. Пусть $\nu \le 0$ и при этом $\nu - m \in [-n_{k+1}, -n_k),\ \nu \in [-n_{i+1}, -n_i),\ k = k(\nu),\ i = i(\nu),\ k \ge i$ Тогда $\frac{\varphi^0(2^{\nu-m})}{\varphi^0(2^\nu)} = \frac{2^{-n_k}}{2^{-n_i}} = 2^{-(n_k - n_i)}$.

2. Пусть $0 < \nu \le m$ и при этом $m - \nu \in [n_k, n_{k+1}),\ \nu \in [n_i, n_{i+1}),\ k = k(\nu),\ i = i(\nu)$. Тогда $\varphi^0(2^{\nu-m})\varphi^0(2^{-\nu}) = 2^{-n_k}2^{-n_i} = 2^{-(n_k+n_i)}$.

3. Пусть $\nu > m$ и при этом $\nu - m \in [n_k, n_{k+1}),\ \nu \in [n_i, n_{i+1}),\ k = k(\nu),\ i = i(\nu),\ k \le i$. Тогда $\frac{\varphi^0(2^{-\nu})}{\varphi^0(2^{m-\nu})} = \frac{2^{-n_k}}{2^{-n_i}} = 2^{-(n_k - n_i)}$.

Поскольку здесь числа n_k и n_i должны удовлетворять соотношениям пп. 1 - 3, а в остальном могут быть произвольными элементами базы b_{φ^0}, из (4.7) и неравенств $\sup_{0\le\nu\le m}\varphi^0(2^{\nu-m})\varphi^0(2^{-\nu}) \le \sup_{\nu\le 0}\frac{\varphi^0(2^{\nu-m})}{\varphi^0(2^\nu)} = \sup_{\nu>m}\frac{\varphi^0(2^{-\nu})}{\varphi^0(2^{m-\nu})}$ вытекает, что

$$\mathfrak{S}_\varphi(2^{-m}) \overset{m}{\sim} \sup_{\nu<0}\frac{\varphi^0(2^{\nu-m})}{\varphi^0(2^\nu)} = \mathfrak{S}^0_\varphi(2^{-m}),\ m \ge 0. \tag{4.8}$$

Применяя полученные равенства и Лемму 3.2 к $\mathfrak{S}^0_{\varphi_*}$, выводим

$$\mathfrak{S}_\varphi(2^m) \overset{m}{\sim} 2^m\mathfrak{S}_{\varphi_*}(2^{-m}) = 2^m\mathfrak{S}^0_{\varphi_*}(2^{-m}) = \mathfrak{S}^0_\varphi(2^m),\ m \ge 0. \tag{4.9}$$

Объединяя (4.8) и (4.9), приходим к первой эквивалентности в (4.6).

Вторая эквивалентность для симметрической φ вытекает из равенств

$$\mathfrak{S}^\infty_{\hat\varphi}(s) = \sup_{t\ge1,\ s\cdot t\ge1}\frac{\varphi(\frac{1}{t})}{\varphi(\frac{1}{s\cdot t})} = \Big(w := \frac{1}{s\cdot t},\ 0 < w,\ s\cdot w \le 1\Big)$$

$$= \sup_{0\le w\le1,\ s\cdot w\le1}\frac{\varphi(s\cdot w)}{\varphi(w)} = \mathfrak{S}^0_\varphi(s),\ 0 \le s < \infty.\ \square$$

Замечание 4.7. Из (4.6) и (2.7) для симметрической M-функции φ следуют равенства

$$\gamma_\varphi = \gamma_{b^0_\varphi} = \gamma_{b^\infty_\varphi},\ \delta_\varphi = \delta_{b^0_\varphi} = \delta_{b^\infty_\varphi}. \tag{4.10}$$

Лемма 4.8. Пусть b^∞_ψ обозначает правую базу M-функции ψ, а $\mathfrak{S}^\infty_{b^0_\psi}(s)$ и $\mathfrak{L}^\infty_{b^0_\psi}(s)$ определены для ψ формулами (3.2) и (3.3), соответственно. Следующие три условия равносильны.

$$1).\ \delta_{b^\infty_\psi} = 1;$$

$$2).\ S_{b^\infty_\psi}(m) = L_{b^\infty_\psi}(m) = m,\ m \geq 1;$$

$$3).\ \mathfrak{S}^\infty_\psi(s) \overset{m}{\sim} \mathfrak{L}^\infty_\psi(s) \overset{m}{\sim} s,\ 1 \leq s < \infty.$$

Доказательство. Известно, см., например, [4], что верхний индекс некоторой базы равен 1, тогда и только тогда, когда неограничены длины блоков идущих подряд единичных значений количественной последовательности этой базы. Но это в точности равносильно 2). Остаётся применить Леммы 4.4 и 4.5 (см. также [1], Лемма 1.3 §1 гл. II). $\Box$

§ 5. Приложение: псевдостепенные функции.

Определение 5.1. 1. Для любого $\alpha \in (0,1)$ базу $b_{t^\alpha} := b^{(\alpha)} = \{b^{(\alpha)}_k\}_{0\leq k<\infty}$ сужения на $[0,1]$ степенной симметрической функции t^α, $t \in [0,\infty)$, мы называем *степенной базой с показателем* α.

2. Базу $b = \{b_k\}_{0\leq k<\infty}$, $0 < \gamma_b \leq \delta_b < 1$, будем называть *псевдостепенной*, если она $\overset{a}{\sim}$эквивалентна суперпозиции баз $b^{[1]} \circ b^{(\delta_b)}$ как суперпозиции подмножеств натурального ряда, где $b^{[1]} = \{b^{[1]}_k\}_{0\leq k<\infty}$ есть некоторая база, такая что $\delta_{b^{[1]}} = 1$, а $b^{(\delta_b)}$ - степенная база с показателем δ_b.

Лемма 5.1. Предположим, что ψ эквивогнутая функция, $0 < \gamma_\psi \leq \delta_\psi < 1$, и пусть $0 < p \neq \frac{1}{\delta_\psi}$. Функция ψ^p является эквивогнутой, тогда и только тогда, когда $p < \frac{1}{\delta_\psi}$.

Доказательство. Если $p < \frac{1}{\delta_\psi}$, то $\delta_{\psi^p} = p \cdot \delta_\psi < 1$, [1]. Значит найдётся $\varepsilon > 0$, такое что $\delta_{\psi^p} + \varepsilon < 1$. Из [1] вытекает, что при $s \geq s_\varepsilon > 1$ справедливо: $\mathfrak{S}_{\psi^p}(s) \leq s^{\delta_{\psi^p}+\varepsilon} \leq s$. Снова из [1] получаем, что функция ψ^p является эквивогнутой.
Обратно, пусть функция $\psi^p \overset{m}{\sim} \varphi$, где φ - M-функция. Предположим. что $p > \frac{1}{\delta_\psi}$. Поскольку $\delta_\varphi = \delta_{\psi^p}$, то $\delta_\varphi = p\cdot\delta_\psi > 1$, что невозможно, [1]. $\Box$

Замечание 5.2. Пусть ψ^0 обозначает сужение на $[0,1]$ M-функции ψ. Известно, [3], что при $p:\ 0 < p \neq \frac{1}{\delta_\psi}$ пространство Марцинкевича

$\mathsf{M}_{\psi^0}[0,1]$ является p-выпуклым (и, стало быть, пространство Лоренца $\Lambda_{\psi^0_*}[0,1]$ является q-вогнутым, $1/p+1/q=1$), тогда и только тогда, когда $p<\frac{1}{\delta_\psi}$. Это равносильно утверждению, что при таких же p симметрическая функция ψ^p является эквивогнутой, тогда и только тогда, когда $0<p<1/\delta_\psi$.

Определение 5.2. Будем говорить, что эквивогнутая функция ψ *псевдостепенная*, если найдётся эквивогнутая функция $\varphi,\ \delta_\varphi=1$, такая что $\psi \overset{m}{\sim} (\varphi)^{\delta_\psi}$. Будем называть ψ *псевдостепенной слева* (*псевдостепенной справа*), если левая (соответственно, правая) симметрическая скобка для ψ является псевдостепенной.

Замечание 5.3. 1. Ясно, что симметрическая функция является псевдостепенной, тогда и только тогда, когда её база (любая из двух $\overset{a}{\sim}$эквивалентных) является псевдостепенной.
2. Так как функция $e(s)=s,\ s\in[0,\infty)$, несобственная, то вогнутая степенная функция псевдостепенной не является.
3. Существуют как псевдостепенные , так и не псевдостепенные M-функции.

Пример 5.4. 1. На $[0,1]$ и на $[1,\infty)$ рассмотрим функции φ^0 и φ^∞ , соответственно: $\varphi^0(0):=0;\ \varphi^0(t):=-t\cdot\log_2\frac{t}{2},\ t\in(0,1];\ \varphi^\infty(t):=\frac{1}{(\varphi^0)(\frac{1}{t})},\ t\in[1,\infty)$. Если $\varphi:=\varphi^0\oplus\varphi^\infty$, то $\delta_\varphi=1$ и, следовательно, $\varphi^{\frac{1}{2}}$ псевдостепенная функция.

2. Определим функцию $\varphi^\infty(t):=t\cdot\log_2 2t,\ t\in[1,\infty)$. Ясно, что φ^∞ есть выпуклая функция на $[1,\infty)$, между тем как функция $(\varphi^\infty)^{\frac{1}{2}}$ вогнута на $[1,\infty)$, а функция $\Phi^0(t):=\frac{1}{(\varphi^\infty)^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{t})}$ вогнута на $[0,1]$. Склейка $\Phi=\Phi^0\oplus(\varphi^\infty)^{\frac{1}{2}}$, как и обе её скобки, по определению не будут псевдостепенными функциями.

Лемма 5.5. Допустим, что $\psi^0,\ \psi^1$ - левая и правая симметрические скобки эквивогнутой функции ψ, соответственно. Справедливо равенство

$$\delta_\psi=\delta_{\psi^0}\vee\delta_{\psi^1};\ \gamma_\psi=\gamma_{\psi^0}\wedge\gamma_{\psi^1} \tag{5.2}$$

Доказательство. В силу равенств $\gamma_\psi=1-\delta_{\psi_*}=1-\delta_{\psi^0_*}\vee\delta_{\psi^1_*}=(1-\delta_{\psi^0_*})\wedge(1-\delta_{\psi^1_*})=\gamma_{\psi^0}\wedge\gamma_{\psi^1}$ достаточно доказать первое равенство в (5.2). Неравенство $\delta_\psi\ge\delta_{\psi^0}\vee\delta_{\psi^1}$ следует из формул (3.2), (4.6) и (4.10).

Предположим, что для некоторой эквивогнутой функции ψ на полуоси справедливо строгое неравенство $\delta_\psi > \delta_{\psi^0} \vee \delta_{\psi^1}$. Выберем $\varepsilon > 0$, так чтобы выполнялись неравенства $\frac{1}{\delta_\psi} < a = \frac{1}{\delta_{\psi^0}} \wedge \frac{1}{\delta_{\psi^1}} - \varepsilon$. Имеем: $\psi^a = (\psi^0 \oplus \psi^1)^a = (\psi^0)^a \oplus (\psi^1)^a$, - по Леммам 3.1 и 5.1 правая часть есть эквивогнутая на полуоси функция, что для левой части противоречит лемме 5.1. $\square$

Следствие 5.6. Предположим, что для эквивогнутой функции ψ выполненяется равенство $\gamma_{\psi^0} \wedge \gamma_{\psi^1} = \gamma_{\psi^0} = 0$. Тогда $\delta_{\psi_*} = 1 - \gamma_{\psi^0} = 1 = \delta_{b^0_{\psi_*}}$, откуда по лемме 4.8 $S_{b^0_{\psi_*}}(m) = L_{b^0_{\psi_*}}(m) = m,\ m \geq 1$.

Теорема 5.7. Пусть для эквивогнутой функции φ симметрические функции φ^0 и φ^∞ суть её левая и правая скобки. Тогда, если $\delta_{\varphi^0} > \delta_{\varphi^\infty}$ и при этом φ^0 псевдостепенная, то φ псевдостепенная. Этот же вывод можно сделать, если $\delta_{\varphi^0} = \delta_{\varphi^\infty}$ и обе функции φ^0 и φ^∞ псевдостепенные. Обратно, если φ псевдостепенная, то из двух её симметрических скобок та из них, чей верхний индекс сжатия/растяжения больше верхнего индекса другой, является псевдостепенной. При равенстве верхних индексов псевдостепенными являются обе скобки.

Доказательство. Так как по лемме 5.5 $\delta_\varphi = \delta_{\varphi^0} \vee \delta_{\varphi^\infty}$, то $\delta_\varphi = \delta_{\varphi^0}$. В силу неравенства $\delta_{\varphi^0} > \delta_{\varphi^\infty}$, а также леммы 5.1 и предположения того, что φ^0 псевдостепенная, обе функции $(\varphi^0)^{\frac{1}{\delta_{\varphi^0}}}$ и $(\varphi^\infty)^{\frac{1}{\delta_{\varphi^0}}}$ являются эквивогнутыми. Обозначим через φ^0 и φ^∞ следы функций φ^0 и φ^∞ на $[0,1]$ и $[1,\infty)$, соответственно, и пусть $\varphi := (\varphi^0 \oplus \varphi^\infty)$. Тогда $\varphi^{\frac{1}{\delta_\varphi}} = (\varphi^0 \oplus \varphi^\infty)^{\frac{1}{\delta_\varphi}} = (\varphi^0)^{\frac{1}{\delta_{\varphi^0}}} \oplus (\varphi^\infty)^{\frac{1}{\delta_{\varphi^0}}}$, откуда по лемме 3.1 $\varphi^{\frac{1}{\delta_\varphi}}$ эквивогнута на $[0,\infty)$. Аналогично доказывается и второе утверждение. $\square$

Следствие 5.8. Для того, чтобы эквивогнутая функция ξ была псевдостепенной, необходимо и достаточно, чтобы из двух баз в определяемой ξ паре симметрических функций база с наибольшим верхним индексом была псевдостепенной, или, если верхние индексы баз равны, - чтобы обе базы были псевдостепенными.

Пользуясь Теоремой 5.7 и её следствием, вопрос о критериях свойства эквивогнутой функции быть псевдостепенной можно свести к поиску этих критериев для её симметрических скобок. Это позволяет в нижеследующей Теореме 5.9 считать функцию ξ совпадающей со своей правой симметрической скобкой; при этом, благодаря Леммам 4.4. - 4.6, можно применять к функции $\mathfrak{S}^\infty_\xi$ теоремы и формулы §1 гл. II монографии [1].

Теорема 5.9. Пусть ξ симметрическая функция, $0 < \gamma_\xi \le \delta_\xi < 1$, $\xi \notin \mathcal{E}$, и пусть b^∞_ξ обозначает правую базу ξ. Следующие условия равносильны:

$$1).\ \xi \text{ псевдостепенная};$$

$$2).\ \mathfrak{S}^\infty_\xi(s) \overset{m}{\sim} s^{\delta_\xi},\ 1 \le s < \infty;$$

$$3).\ \mathfrak{S}^\infty_{\xi_*}(s) \overset{m}{\sim} s^{\gamma_{\xi_*}},\ 0 \le s \le 1;$$

$$4).\ \mathfrak{S}^\infty_\xi(s) \overset{m}{\sim} \mathfrak{L}^\infty_\xi(s) \overset{m}{\sim} s^{\delta_\xi},\ 1 \le s < \infty;$$

$$5).\ S_{b^\infty_\xi}(k) \overset{a}{\sim} L_{b^\infty_\xi}(k) \overset{a}{\sim} k \cdot \delta_{b^\infty_\xi},\ k \ge 1.$$

Доказательство. Докажем 1) $\Rightarrow$ 2). Поскольку $\xi(t)$ псевдостепенная функция, то $\Big(\xi(t)\Big)^{\frac{1}{\delta_\xi}} \overset{m}{\sim}$эквивалентна M-функции $\varphi(t)$, где $\delta_\varphi = 1$. Пользуясь Леммой 4.8 и формулами (3.4), получаем: $\mathfrak{S}^\infty_\xi(s) \overset{m}{\sim} \mathfrak{S}^\infty_{(\varphi)^{\delta_\xi}}(s) = \Big(\mathfrak{S}^\infty_\varphi(s)\Big)^{\delta_\xi} \overset{m}{\sim} s^{\delta_\xi},\ s \ge 1$.

Покажем импликацию 2)$\Rightarrow$1). Предположим, что $\mathfrak{S}^\infty_\xi(s) \overset{m}{\sim} s^{\delta_\xi},\ s \ge 1$, и покажем, что ξ - псевдостепенная функция. Положим $\varphi(t) = \Big(\overline{\xi}(t)\Big)^{\frac{1}{\delta_{\overline{\xi}}}}$, где M-функция $\overline{\xi} \overset{m}{\sim}$ эквивалентна ξ, нужно показать, что φ эквивогнута. Ясно, что φ не убывает. Кроме того, по (3.4), $\mathfrak{S}^\infty_\varphi(s) = \Big(\mathfrak{S}^\infty_{\overline{\xi}}(s)\Big)^{\frac{1}{\delta_{\overline{\xi}}}} \overset{m}{\sim} s,\ s \ge 1$. Значит для подходящей константы $C > 0$ справедливо: $\sup_{t>0} \frac{\varphi(s\cdot t)}{\varphi(t)} \le C \cdot s,\ s \ge 1$, откуда $\frac{\varphi(s\cdot t)}{s\cdot t} \le C \cdot \frac{\varphi(t)}{t},\ s \ge 1,\ t > 0$. По теореме 1.1, [1] $\varphi \overset{m}{\sim}$эквивалентна положительной вогнутой функции, т.е. эквивогнута. Но, поскольку $\xi \overset{m}{\sim} \overline{\xi}$, то $\varphi = \Big(\overline{\xi}\Big)^{\frac{1}{\delta_{\overline{\xi}}}} \overset{m}{\sim} \Big(\xi\Big)^{\frac{1}{\delta_\xi}}$, т.е. ξ псевдостепенная функция.

Эквивалентность 2) и 3) следует из формул (3.4). Например, для 2)$\Rightarrow$3) при $0 < u \le 1$ имеем: $\mathfrak{S}^\infty_{\xi_*}(u) = u \cdot \mathfrak{S}^\infty_\xi(\frac{1}{u}) \overset{m}{\sim} u^{\gamma_{\xi_*}}$, и в точности также показывается обратная импликация.

Импликация 1)$\Rightarrow$4) следует из Леммы 4.8, формул (3.4) и формул (1.19) §1 гл. II, [1], а импликация 4)$\Rightarrow$2) тривиальна.

Равносильность 4) и 5) вытекает из Лемм 4.4. - 4.6. $\Box$

Замечание 5.10. Для функции φ условие регулярности её изменения на $[0,1]$ с показателем δ_φ, [4], не достаточно, для того чтобы φ была псевдостепенной; тем более не является достаточным для этого выполнение условия (3.2) Теоремы 3.11, [6]. Это видно на Примере 5.4.2, функция которого псевдостепенной не является.

Литература

1. **Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семёнов Е.М.** Интерполяция линейных операторов. М., Наука, 1978, 400 с.

2. **Одинец В.П., Шлензак В.А.,** Основы выпуклого анализа. Москва $\diamondsuit$ Ижевск, РХД, 2011, 520 с.

3. **Новиков С.И.,** Котип и тип функциональных пространств Лоренца. Матем. Заметки, 32(1982)2, с. 213 - 221. ,

4. **Меклер А.А.,** О натуральных характеристиках регулярно меняющихся квазивогнутых модуляр. Вестник Сыктывкарского университета, *Сер. 1, Вып. 8. 2008*, с. 27 - 38, Сыктывкар: Изд-во СГУ.

5. **Меклер А.А.**, Замечания о некоторых инвариантных свойствах пространств Марцинкевича и Орлича-I. Вестник Сыктывкарского университета, *Сер. 1, Вып. 14. 2011*, с. 33 - 48, Сыктывкар: Изд-во СГУ.

6. **Меклер А.А.**, Замечания о некоторых инвариантных свойствах пространств Марцинкевича и Орлича-II. Вестник Сыктывкарского университета, *Сер. 1, Вып. 14. 2011*, с. 49 - 56, Сыктывкар: Изд-во СГУ.

Summary

Mekler A. A. On Marcinkiewicz modulars on $[0, 1]$ and $[0, \infty)$

It is presented a reduction to one-another of two cases: the case of Marcinkiewicz (Lorenz, Orlicz) functional spaces on the unit interval and the case of the same spaces on the positive semiaxis. In this connection p-convexity of these spaces is discussed.

Keywords: symmetrical Marcinkiewicz modulars, equiconcave pseudopower functions.

Bremen University *Поступила 30.04.2012*