

**УДК 539.3**

**МЕТОД НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ОБ ИЗГИБЕ  
ЗАМКНУТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ  
С ЖЕСТКО ЗАЩЕМЛЕННЫМИ КРАЯМИ<sup>1</sup>**

*В. В. Миронов, А. С. Майбуров*

Работа посвящена определению напряженно-деформированного состояния в замкнутой цилиндрической оболочке под действием нормальной нагрузки. В качестве базовых уравнений равновесия взяты уравнения изгиба цилиндрических оболочек типа Кармана. В теории нелинейных уравнений Кармана учитывается обычно отбрасываемое слагаемое  $\Lambda(\Psi, w)$ .

Краевая задача решается, исходя из того, что начальная нагрузка является равномерно распределенной по площадке, размеры которой пропорциональны размерам оболочки (в развернутом виде), и центр которой совпадает с центром оболочки. Оболочка является жестко защемленной по обоим краям. Решение задачи сводится к нахождению прогиба и функций напряжений. Основной идеей является замена интегро-дифференциальной системы уравнений на интегральную систему (метод нелинейных интегральных уравнений), которая решается относительно вторых производных искомых функций прогиба и напряжений. Для ее разрешения используется стационарный метод Ричардсона, а также замена интегралов на ряды с помощью квадратур Лежандра.

Основной особенностью данной работы является нахождение функции Грина бигармонического оператора методом Мориса Леви. Вторая особенность состоит в том, что в стационарном методе

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 годы, ГК № 02.740.11.0618

Ричардсона могут быть использованы различные параметры, отвечающие за скорость сходимости для прогиба и функции напряжений, за счет чего можно повысить скорость сходимости итерационного процесса.

*Ключевые слова:* напряженно-деформированное состояние, замкнутая цилиндрическая оболочка, уравнение типа Кармана.

### 1. Приведение краевой задачи Кáрмана к системе интегральных уравнений

Уравнения равновесия замкнутой цилиндрической оболочки в рамках теории Кáрмана имеют вид [?]:

$$\begin{aligned}\Delta^2 w &= \frac{R^4}{d_0} q_n - \frac{R}{d_0} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{d_0} \tilde{\Lambda}(\Psi, w), \\ \Delta^2 \Psi &= EhR \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} Eh \tilde{\Lambda}(w, w), \\ |\xi| &\leq \xi_0/2, |\varphi| \leq \pi.\end{aligned}\quad (1.1)$$

Здесь  $w, \Psi$  - нормальное перемещение (прогиб точек срединной поверхности) и функция напряжений;  $d_0 = Eh^3/12(1-\nu^2)$ ;  $E, \nu$  - модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки;

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \varphi^2}, \\ \tilde{\Lambda}(\Psi, w) &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial \varphi} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \varphi} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}.\end{aligned}\quad (1.2)$$

Имея ввиду применение в дальнейшем квадратуры Гаусса-Лежандра, выполним замену переменных по формулам

$$\xi = \frac{1}{2} \xi_0 x, \varphi = \pi y.\quad (1.3)$$

Тогда с использованием обозначений

$$(\cdot)_{11} \triangleq \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2}, (\cdot)_{12} \triangleq \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x \partial y}, (\cdot)_{22} \triangleq \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2}$$

можно записать

$$\Delta(\cdot) = \frac{4}{\xi_0^2} (\cdot)_{11} + \frac{1}{\pi^2} (\cdot)_{22}, \tilde{\Lambda}(\Psi, w) = \frac{4}{\pi^2 \xi_0^2} \Lambda(\Psi, w),\quad (1.4)$$

где

$$\Lambda(\Psi, w) = \Psi_{11}w_{22} - 2\Psi_{12}w_{12} + \Psi_{22}w_{11}. \quad (1.4')$$

Окончательно систему уравнений (1.1) будем представлять в виде

$$\begin{aligned} \Delta^2 w &= \frac{R^4}{d_0} q_n - \frac{4R}{\xi_0^2 d_0} \Psi_{11} + \frac{4}{\pi^2 d_0 \xi_0^2} \Lambda(\Psi, w), \\ \Delta^2 \Psi &= \frac{4EhR}{\xi_0^2} w_{11} - \frac{2Eh}{\pi^2 \xi_0^2} \Lambda(w, w), \\ &(|x| \leq 1, |y| \leq 1). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Если края оболочки жестко закреплены относительно прогиба и угла поворота, но свободны от тангенциальной нагрузки, то должны выполняться следующие граничные условия [?]

$$w(\pm 1, y) = 0, w'_x(\pm 1, y) = 0; \quad (1.6)_1$$

$$\Psi(\pm 1, y) = 0, \Psi'_x(\pm 1, y) = 0. \quad (1.6)_2$$

Это означает, что для обращения бигармонических операторов (см. левые части уравнений (1.5)) можно использовать *единую* функцию Грина, которая в предположении, что напряженно-деформированное состояние в оболочке симметрично относительно плоскости  $xy$ , определяется следующей краевой задачей:

$$\Delta^2 G = \delta(x - \alpha)\delta(y - \beta); \quad (1.7)_1$$

$$G(\pm 1, y) = 0, G'_x(\pm 1, y) = 0,$$

$$G(x, y) = G(x, -y). \quad (1.7)_2$$

Если функция Грина известна, то можно вместо краевой задачи (1.5) решать следующую систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \frac{R^4}{d_0} \int_{\Omega} G(x, y; \alpha, \beta) q_n(\alpha, \beta) d\Omega - \frac{4R}{\xi_0^2 d_0} \int_{\Omega} G(x, y; \alpha, \beta) \Psi_{11}(\alpha, \beta) d\Omega + \\ &+ \frac{4}{\pi^2 d_0 \xi_0^2} \int_{\Omega} G(x, y; \alpha, \beta) [\Lambda(\Psi, w)](\alpha, \beta) d\Omega, \\ \Psi(x, y) &= \frac{4EhR}{\xi_0^2} \int_{\Omega} G(x, y; \alpha, \beta) w_{11}(\alpha, \beta) d\Omega - \\ &- \frac{2Eh}{\pi^2 \xi_0^2} \int_{\Omega} G(x, y; \alpha, \beta) [\Lambda(w, w)](\alpha, \beta) d\Omega. \end{aligned}$$

Вычисляя вторые производные от функций  $w(x, y)$ ,  $\Psi(x, y)$ , приходим к системе шести нелинейных интегральных уравнений относительно  $w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}, \Psi_{xx}, \Psi_{xy}, \Psi_{yy}$  :

$$\begin{aligned} w_{ij}(x, y) &= \frac{R^4}{d_0} \int_{\Omega} G_{ij}(x, y; \alpha, \beta) q_n(\alpha, \beta) d\Omega - \\ &\quad - \frac{4R}{\xi_0^2 d_0} \int_{\Omega} G_{ij}(x, y; \alpha, \beta) \Psi_{11}(\alpha, \beta) d\Omega + \\ &\quad + \frac{4}{\pi^2 d_0 \xi_0^2} \int_{\Omega} G_{ij}(x, y; \alpha, \beta) [\Lambda(\Psi, w)](\alpha, \beta) d\Omega, \\ \Psi_{ij}(x, y) &= \frac{4EhR}{\xi_0^2} \int_{\Omega} G_{ij}(x, y; \alpha, \beta) w_{11}(\alpha, \beta) d\Omega - \\ &\quad - \frac{2Eh}{\pi^2 \xi_0^2} \int_{\Omega} G_{ij}(x, y; \alpha, \beta) [\Lambda(w, w)](\alpha, \beta) d\Omega, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где  $i, j = 1, 2$ ;  $G_{12}(x, y; \alpha, \beta) = \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}$ ;  $f_{11} \triangleq f_{xx}$ ,  $f_{12} \triangleq f_{xy}$ ,  $f_{22} \triangleq f_{yy}$ .

## 2. Построение функции Грина бигармонического оператора методом Мориса Леви

Функцию Грина можно представить в виде

$$G(x, y) = G_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} G_k(x) \cos(k\pi y). \quad (2.1)$$

Рассмотрим сначала случай осесимметричной деформации ( $k=0$ ). Краевая задача трансформируется при  $k=0$  в следующую:

$$\frac{d^4 G_0}{dx^4} = \delta(x - \alpha), \quad (2.2)_1$$

$$G_0(\pm 1) = 0, G_0'(\pm 1) = 0. \quad (2.2)_2$$

Общее решение уравнения (2.2)<sub>1</sub> имеет вид

$$G_0(x) = \sum_{k=0}^3 C_k x^k + \frac{1}{6} (x - \alpha^3) \Theta(x - \alpha),$$

где  $\Theta(x - \alpha)$  - функция Хевисайда:

$$\Theta(x - \alpha) = \begin{cases} 1, & x > \alpha \\ 0, & x < \alpha. \end{cases} \quad (2.3)$$

Учитывая, что

$$G'_0(x) = \sum_{k=0}^3 kC_k x^{k-1} + \frac{1}{2}(x - \alpha^2)\Theta(x - \alpha),$$

на основании граничных условий (1.7)<sub>2</sub> и свойств функции Хевисайда получаем

$$\begin{aligned} G_0(+1) &= C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + \frac{1}{6}(1 - \alpha)^3 = 0, \\ G_0(-1) &= C_0 - C_1 + C_2 - C_3 = 0, \\ G'_0(+1) &= C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \frac{1}{2}(1 - \alpha)^2 = 0, \\ G'_0(-1) &= C_1 - 2C_2 + C_3 = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Система (2.4) имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{24}(1 - \alpha)^2(1 + 2\alpha), \quad C_1 = \frac{1}{8}(1 - \alpha)^2\alpha, \\ C_3 &= -\frac{1}{24}(1 - \alpha)^2(\alpha + 2), \quad C_2 = -\frac{1}{8}(1 - \alpha)^2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Окончательно получаем следующее выражение для функции  $G_0(x)$ :

$$G_0(x) = \frac{(1 - \alpha)^2}{24}(1 + 2\alpha + 3\alpha x - 3x^2 - \alpha x^3 - 2x^3) + \frac{1}{6}(x - \alpha)^3\Theta(x - \alpha). \quad (2.6)$$

Перейдем теперь к нахождению функции  $G_k(x)$ ,  $k \in 1 : \infty$  (см. формулу (2.1)). Представим  $\delta$ -функцию в виде формального ряда Фурье

$$\delta(y - \beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \cos(k\pi y). \quad (2.7)$$

Умножив обе части равенства (2.7) на  $\cos(j\pi y)$  и выполнив интегрирование по интервалу  $[0, 1]$ , получим

$$\int_0^1 \delta(y - \beta) \cos(j\pi y) dy = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \int_0^1 \cos(k\pi y) \cos(j\pi y) dy = \delta_k \begin{cases} 0, & k \neq j \\ \frac{1}{2}, & k = j, \end{cases}$$

т.е.

$$\delta(y - \beta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \cos(k\pi\beta) \cos(k\pi y). \quad (2.8)$$

На основании формул (2.1), (2.8) уравнение (1.7)<sub>1</sub> можно представить так:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \Delta^2(G_k \cos(k\pi y)) &\equiv \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{16}{\xi_0^4} G_k^{IV} - \frac{8k^2}{\xi_0^2} G_k'' + k^4 G_k \right) \cos(k\pi y) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \delta(x - \alpha) \cos(k\pi\beta) \cos(k\pi y), \end{aligned}$$

или (в силу линейной независимости функций  $\cos(k\pi y)$ ,  $k \in 1 : \infty$ )

$$G_k^{IV} - \frac{1}{2} k^2 \xi_0^2 G_k'' + \frac{k^4 \xi_0^4}{16} G_k = \frac{\xi_0^4}{32} \delta(x - \alpha) \cos(k\pi\beta). \quad (2.9)$$

Соответствующее (2.9) характеристическое уравнение имеет вид

$$(\lambda_k^2 - k^2 \xi_0^2 / 4)^2 = 0,$$

т.е. фундаментальную систему решений составляют функции

$$u_1 = e^{\lambda_k y}, u_2 = e^{-\lambda_k y}, u_3 = ye^{\lambda_k y}, u_4 = ye^{-\lambda_k y}, \quad (2.10)$$

где

$$\lambda_k \triangleq k \xi_0 / 2. \quad (2.10')$$

Таким образом общее решение уравнения (2.9) выглядит так:

$$G_k(x) = \sum_{i=1}^4 c_i u_i(x) + G_k^{(p)}(x). \quad (2.11)$$

Здесь  $G_k^{(p)}(x)$  - частное (партикулярное) решение, которое будем находить методом вариации произвольных постоянных Лагранжа. Согласно методу Лагранжа константы  $c_i$ ,  $i \in 1 : 4$  заменяются соответствующими функциями  $c_i(x)$ ,  $i \in 1 : 4$ , производные от которых определяются из следующей системы уравнений:

$$\sum_{i=1}^4 c_i' u_i = \sum_{i=1}^4 c_i' u_i' = \sum_{i=1}^4 c_i' u_i'' = 0, \quad \sum_{i=1}^4 c_i' u_i''' = \varphi(x), \quad (2.11)$$

где

$$\varphi(x) = \frac{\xi_0^4}{32} \cos(k\pi\beta) \delta(x - \alpha). \quad (2.11')$$

Систему (2.11') решаем методом Крамера. Вычислим определитель  $\Delta$  матрицы системы (2.11) и определители  $\Delta c_i'$ ,  $i \in 1 : 4$ , для которых

$i$ -ый столбец матрицы системы заменяется столбцом свободных членов. Получим:

$$c = -16\lambda_k^4, \quad (2.12)$$

$$\Delta c'_1 = \frac{\xi_0^4}{8} \cos(k\pi\beta) \delta(x - \alpha) \lambda_k e^{-\lambda_k x} (1 + \lambda_k x). \quad (2.13)$$

$$c'_1 = \frac{\Delta c'_1}{\Delta} = -\frac{\xi_0^4}{128\lambda_k^3} \cos(k\pi\beta) \delta(x - \alpha) e^{-\lambda_k x} (1 + \lambda_k x).$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} c_1(x) &= -\frac{\xi_0^4}{128\lambda_k^3} \cos(k\pi\beta) \int_{-1}^x e^{-\lambda_k t} (1 + \lambda_k t) \delta(t - \alpha) dt = \\ &= -\frac{\xi_0^4}{128\lambda_k^3} \cos(k\pi\beta) \begin{cases} 0, & \alpha > x \\ e^{-\lambda_k \alpha} (1 + \lambda_k \alpha), & \alpha < x \end{cases} \end{aligned}$$

или

$$c_1(x) = -\frac{\xi_0^4}{128\lambda_k^3} \cos(k\pi\beta) e^{-\lambda_k \alpha} (1 + \lambda_k \alpha) H(x - \alpha). \quad (2.14)$$

Аналогично найдем

$$\begin{aligned} c_2(x) &= -\frac{\xi_0^4}{128\lambda_k^3} \cos(k\pi\beta) e^{\lambda_k \alpha} (-1 + \lambda_k \alpha) H(x - \alpha), \\ c_3(x) &= \frac{\xi_0^4}{128\lambda_k^2} \cos(k\pi\beta) e^{-\lambda_k \alpha} H(x - \alpha), \\ c_4(x) &= \frac{\xi_0^4}{128\lambda_k^2} \cos(k\pi\beta) e^{\lambda_k \alpha} H(x - \alpha), \end{aligned} \quad (2.15)$$

Таким образом, частное решение уравнения примет вид

$$\begin{aligned} G_k^{(p)}(x) &= c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + c_4 u_4 = \\ &= \frac{\xi_0^4}{128\lambda_k^3} \cos(k\pi\beta) [(-1 + \lambda_k(x - \alpha)) e^{\lambda_k(x - \alpha)} + \\ &+ (1 + \lambda_k(x - \alpha)) e^{-\lambda_k(x - \alpha)}] H(x - \alpha) \triangleq f(x). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Теперь найдем общее решение уравнения. С помощью граничных условий найдем коэффициенты  $c_i = c_i(x)$ ,  $i \in 1 : 4$ .

$$\frac{dG}{dx} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{dG_k(x)}{dx} \cos(k\pi y).$$

Из граничных условий имеем

$$G_k(-1) = 0, \left( \frac{dG_k}{dx} \right) (-1) = 0.$$

$$G_k(+1) = 0, \left( \frac{dG_k}{dx} \right) (+1) = 0.$$

Получим систему уравнений с неизвестными  $c_i, i \in 1 : 4$ .

Учтем, что  $H(x - \alpha) = 1$  при  $(x - \alpha) > 0$ . Подставляя  $x = -1$ , будем иметь  $\alpha < -1$ , что противоречит условию  $-1 \leq \alpha \leq 1$ . Следовательно,  $H(x - \alpha) = 0$  при  $x = -1$ ,  $-1 \leq \alpha \leq 1$ , т.е.

$$-G_k^p(-1) = 0, - \left( \frac{dG_k^p}{dx} \right) (-1) = 0.$$

Система примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 c_i u_i(-1) &= -G_k^p(-1) = 0, \\ \sum_{i=1}^4 c_i u_i(+1) &= -G_k^p(+1) = f(+1), \\ \sum_{i=1}^4 c_i u_i'(-1) &= - \left( \frac{dG_k^p}{dx} \right) (-1) = 0, \\ \sum_{i=1}^4 c_i u_i'(+1) &= - \left( \frac{dG_k^p}{dx} \right) (+1) = f'(+1). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Будем решать эту систему методом Крамера. Вычислим определитель  $\Delta$  матрицы системы (2.17) и определители  $\Delta_{c_i}, i \in 1 : 4$ , для которых  $i$ -тый столбец матрицы системы заменяется столбцом свободных членов. После преобразований получим:

$$\Delta = 2(\cosh(4\lambda_k - 8\lambda_k^2 - 1)). \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{c_1} &= f(+1) [e^{3\lambda_k}(1 + \lambda_k) - e^{-\lambda_k}(1 - \lambda_k(3 - 4\lambda_k))] - \\ &\quad - f'(+1) [e^{3\lambda_k} - e^{-\lambda_k}(1 - 4\lambda_k)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{c_2} &= f(+1) [e^{-3\lambda_k}(1 - \lambda_k) - e^{\lambda_k}(1 + \lambda_k(3 + 4\lambda_k))] - \\ &\quad - f'(+1) [e^{-3\lambda_k} - e^{\lambda_k}(1 + 4\lambda_k)], \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\Delta_{c_3} &= -\lambda_k f(+1) [e^{3\lambda_k} - e^{-\lambda_k}(1 - 4\lambda_k)] + f'(+1) [e^{3\lambda_k} - e^{-\lambda_k}(1 + 4\lambda_k)], \\ \Delta_{c_4} &= \lambda_k f(+1) [e^{-3\lambda_k} - e^{\lambda_k}(1 + 4\lambda_k)] + f'(+1) [e^{-3\lambda_k} - e^{\lambda_k}(1 - 4\lambda_k)].\end{aligned}$$

$$c_1 = \frac{\Delta_{c_1}}{\Delta}, c_2 = \frac{\Delta_{c_2}}{\Delta}, c_3 = \frac{\Delta_{c_3}}{\Delta}, c_4 = \frac{\Delta_{c_4}}{\Delta}. \quad (2.19)$$

Таким образом, используя формулы (2.6), (2.10), (2.16) и (2.19) мы можем записать искомую функцию Грина:

$$G(x, y; \alpha, \beta) = G_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \sum_{i=1}^4 c_i u_i(x) + G_k^p(x) \right] \cos(k\pi y). \quad (2.20)$$

### 3. Метод механических квадратур решения системы интегральных уравнений

В силу нелинейности системы (1.8) её аналитическое решение весьма затруднено. Для решения систем подобного типа применяются итерационные способы решения, в которых функции заменяются их значениями в узлах сетки.

Поскольку в системе (1.8) отсутствуют частные производные, то для решения можно использовать неравномерную сетку на  $\Omega$ . При этом интегралы из формул (1.8) заменяются на соответствующие квадратурные формулы. Известно, что одной из эффективных квадратур (в рассматриваемой задаче) является квадратура Гаусса Лежандра.

$$\int_{\Omega} f(x, y) d\Omega \triangleq \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(x, y) dx dy = \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^m A_{\nu n} A_{\mu m} f(x_{\nu n}, y_{\mu m}),$$

где  $x_{\nu n}, y_{\mu m}$  - корни полиномов Лежандра  $L_n(x), L_m(y)$  :

$$-1 \leq x_{1n} \leq x_{2n} \leq \dots \leq x_{nn} \leq +1,$$

$$-1 \leq y_{1m} \leq y_{2m} \leq \dots \leq y_{mm} \leq +1,$$

$A_{\nu n}, A_{\mu m}$  - коэффициенты квадратурной формулы Гаусса Лежандра:

$$A_{\nu n} = \frac{2(1 - x_{\nu n}^2)}{n^2(L_{n-1}x_{\nu n})^2},$$

$$A_{\mu m} = \frac{2(1 - y_{\mu m}^2)}{m^2(L_{m-1}y_{\mu m})^2}.$$

Применим квадратурную формулу Гаусса - Лежандра к системе интегральных уравнений (1.8). Имеем

$$\begin{aligned}
w_{ij}(x, y) &= \frac{R^4}{d_0} \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^m A_{\nu n} A_{\mu m} G_{ij}(x, y; x_{\nu n}, y_{\mu m}) q_n(x_{\nu n}, y_{\mu m}) - \\
&\quad - \frac{4R}{\xi_0^2 d_0} \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^m A_{\nu n} A_{\mu m} G_{ij}(x, y; x_{\nu n}, y_{\mu m}) \Psi_{11}(x_{\nu n}, y_{\mu m}) + \\
&\quad + \frac{4}{\pi^2 d_0 \xi_0^2} \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^m A_{\nu n} A_{\mu m} G_{ij}(x, y; x_{\nu n}, y_{\mu m}) [\Lambda(\Psi, w)](x_{\nu n}, y_{\mu m}), \\
\Psi_{ij}(x, y) &= \frac{4EhR}{\xi_0^2} \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^m A_{\nu n} A_{\mu m} G_{ij}(x, y; x_{\nu n}, y_{\mu m}) w_{11}(x_{\nu n}, y_{\mu m}) - \\
&\quad - \frac{2Eh}{\pi^2 \xi_0^2} \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^m A_{\nu n} A_{\mu m} G_{ij}(x, y; x_{\nu n}, y_{\mu m}) [\Lambda(w, w)](x_{\nu n}, y_{\mu m}). \quad (3.1)
\end{aligned}$$

Перейдем от системы функциональных уравнений (3.1) к системе нелинейных алгебраических уравнений.

$$\begin{aligned}
w_{ij}(x_{\gamma n}, y_{\epsilon m}) &= \frac{R^4}{d_0} \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^m A_{\nu n} A_{\mu m} G_{ij}(x_{\gamma n}, y_{\epsilon m}; x_{\nu n}, y_{\mu m}) q_n(x_{\nu n}, y_{\mu m}) - \\
&\quad - \frac{4R}{\xi_0^2 d_0} \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^m A_{\nu n} A_{\mu m} G_{ij}(x_{\gamma n}, y_{\epsilon m}; x_{\nu n}, y_{\mu m}) \Psi_{11}(x_{\nu n}, y_{\mu m}) + \\
&\quad + \frac{4}{\pi^2 d_0 \xi_0^2} \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^m A_{\nu n} A_{\mu m} G_{ij}(x_{\gamma n}, y_{\epsilon m}; x_{\nu n}, y_{\mu m}) [\Lambda(\Psi, w)](x_{\nu n}, y_{\mu m}), \\
\Psi_{ij}(x_{\gamma n}, y_{\epsilon m}) &= \frac{4EhR}{\xi_0^2} \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^m A_{\nu n} A_{\mu m} G_{ij}(x_{\gamma n}, y_{\epsilon m}; x_{\nu n}, y_{\mu m}) w_{11}(x_{\nu n}, y_{\mu m}) - \\
&\quad - \frac{2Eh}{\pi^2 \xi_0^2} \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^m A_{\nu n} A_{\mu m} G_{ij}(x_{\gamma n}, y_{\epsilon m}; x_{\nu n}, y_{\mu m}) [\Lambda(w, w)](x_{\nu n}, y_{\mu m}). \quad (3.2)
\end{aligned}$$

Для решения системы (3.2) можно использовать стационарный метод Ричардсона, при условии, что значения функций  $w_{ij}(x_{\gamma n}, y_{\epsilon m})$ ,  $\Psi_{ij}(x_{\gamma n}, y_{\epsilon m})$  будут братья в точках - корнях полиномов Гаусса-Лежандра.

Применим метод Ричардсона к системе нелинейных алгебраических уравнений (3.2).

$$\begin{aligned}
w_{ij}^{(k)}(x_{\gamma n}, y_{\epsilon m}) &= \tau_1 w_{ij}^{(0)} + (1 - \tau_1) w_{ij}^{(k-1)}(x_{\gamma n}, y_{\epsilon m}) - \\
&- \frac{4R\tau_1}{\xi_0^2 d_0} \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^m A_{\nu n} A_{\mu m} G_{ij}(x_{\gamma n}, y_{\epsilon m}; x_{\nu n}, y_{\mu m}) \Psi_{11}^{(k)}(x_{\nu n}, y_{\mu m}) + \\
&+ \frac{4\tau_1}{\pi^2 d_0 \xi_0^2} \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^m A_{\nu n} A_{\mu m} G_{ij}(x_{\gamma n}, y_{\epsilon m}; x_{\nu n}, y_{\mu m}) [\Lambda(\Psi^{(k)}, w^{(k-1)})](x_{\nu n}, y_{\mu m}), \\
\Psi_{ij}^{(k)}(x_{\gamma n}, y_{\epsilon m}) &= (1 - \tau_2) \Psi_{ij}^{(k-1)}(x_{\gamma n}, y_{\epsilon m}) + \\
&+ \frac{4EhR\tau_2}{\xi_0^2} \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^m A_{\nu n} A_{\mu m} G_{ij}(x_{\gamma n}, y_{\epsilon m}; x_{\nu n}, y_{\mu m}) w_{11}^{(k-1)}(x_{\nu n}, y_{\mu m}) - \\
&- \frac{2Eh\tau_2}{\pi^2 \xi_0^2} \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^m A_{\nu n} A_{\mu m} G_{ij}(x_{\gamma n}, y_{\epsilon m}; x_{\nu n}, y_{\mu m}) [\Lambda(w^{(k-1)}, w^{(k-1)})](x_{\nu n}, y_{\mu m}),
\end{aligned} \tag{3.3}$$

где  $\tau_1, \tau_2$  - фиксированные величины (вообще говоря, различные), отвечающие за скорость сходимости.

Итерационный процесс длится до тех пор, пока максимальная разница между значениями функций прогиба на текущем и предыдущем шагах не станет меньше определенной величины  $\rho$ .

$$\max_{\substack{\gamma \in 1..n \\ \epsilon \in 1..m}} \left| \frac{w_{ij}^{(n)}(x_{\gamma n}, y_{\epsilon m}) - w_{ij}^{(n-1)}(x_{\gamma n}, y_{\epsilon m})}{w_{ij}^{(n-1)}(x_{\gamma n}, y_{\epsilon m})} \right| < \rho.$$

#### 4. Численный эксперимент

На основе предложенного алгоритма проводился численный эксперимент. Результаты приведены для случая деформации замкнутой цилиндрической оболочки с учетом нелинейных слагаемых.

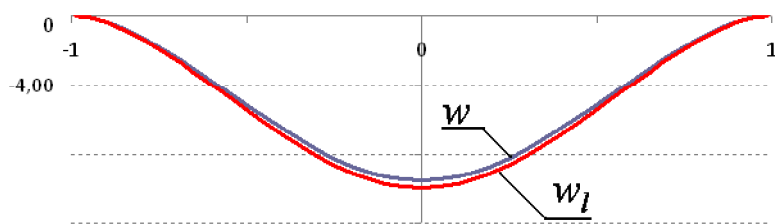


Рис. 4.1. Графики прогиба ( $w$ ) – линейная теория, ( $w_l$ ) – нелинейная теория)

На рис. 4.1. приведены графики значений функций прогиба ( $w$ ) в сечении  $y = 0$  по линейной (индекс  $l$ ) и нелинейной теориям при следующих параметрах:  $Q_0 = 15 \text{ кг/см}^2$ . Нагрузка равномерно распределена по площадке  $y \in [-1, 1]$ ,  $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ .  $\varepsilon = 0.25$ ,  $l = 500 \text{ см}$ ,  $R = 50 \text{ см}$ ,  $h = 1 \text{ см}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ .

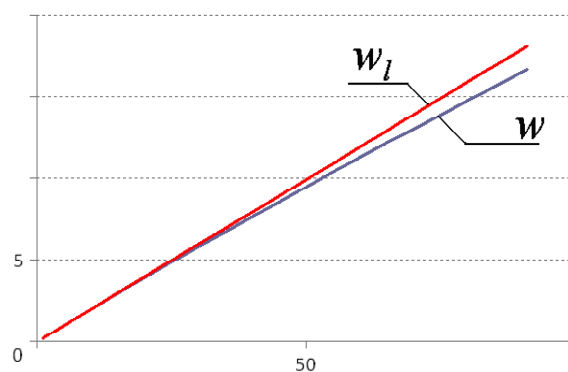


Рис. 4.2. Графики зависимости прогиба от нагрузки (индекс  $l$  обозначает величину, рассчитанную по линейной теории)

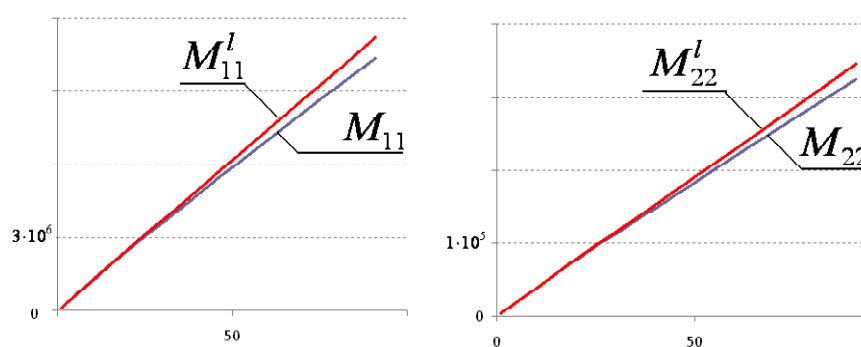


Рис. 4.3. Графики зависимости изгибающих моментов от нагрузки (индекс  $l$  обозначает величину, рассчитанную по линейной теории)

На рис. 4.2-4.3 приведены графики зависимости значений функций прогиба  $w$  и изгибающих моментов  $M_{11}$ ,  $M_{22}$  от величины нагрузки по линейной и нелинейной теориям при следующих параметрах:  $Q_0 \in [1, 90]$  (кг/см<sup>2</sup>). Нагрузка равномерно распределена по всей площади оболочки.  $l = 500$  см,  $R = 50$  см,  $h = 1$  см,  $\nu = 0.3$ ,  $E = \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>.

Как усматривается из приведенных графиков учет нелинейных слагаемых в уравнениях рассматриваемой задачи существенно влияет на значения прогибов и изгибающих моментов. При проведении численного эксперимента в довольно широком диапазоне параметров также проводилось исследование влияния на скорость сходимости итерационного процесса параметров  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  из модифицированной стационарной схемы Ричардсона. Как показал эксперимент при  $\tau_1 = \tau_2 = 0.7$  и  $\tau_1 = 0.8$ ,  $\tau_2 = 0.6$  достигается максимальная скорость сходимости итерационного процесса.

## Литература

1. **Михайловский, Е.И.** Математические модели механики упругих тел. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского ун-та, 2007. - 516 с.
2. **Михайловский Е.И., Миронов В.В., Кузнецова Ю.Л.** Об одном алгоритме решения краевых задач с нелинейностью типа Кармана // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Мат., Мех., Инф. 2007. Вып.7. С.123-136.

### Summary

**Mironov V. V., Mayburov A. S.** The method of nonlinear integral equations in the problem of bending of a closed cylindrical shell with rigidly clamped edges

Work is devoted to definition intense the deformed conditions in a selfcontained cylindrical envelope under the influence of normal loading. As constitutive equations of equilibrium the equations of a bend of cylindrical envelopes are taken such as the Pocket. In the theory of the non-linear equations of the Pocket the routinely droppable is considered  $\Lambda(\Psi, w)$  item.

The boundary value problem is solved, recognizing that initial loading is evenly the distributed on a platform which sizes are proportional to the sizes envelopes (in expanded form) and which center coincides with the center of an envelope. The envelope is hardly jammed on both edges. The solution of a task is consolidated to finding of a deflection and stress functions. The

main idea is replacement integro-differential set of equations on integral system (a method of non-linear integral equations) which decides concerning the second derivativ required functions of a deflection and tension. For its permission it is used Richardson's stationary method, and also replacement of integrals by ranks with the help quadratures of Legendre.

The main feature of this work is finding of a Green function biharmonic operator Maurice Levi's method. The second feature consists in that in Richardson's stationary method the various can be used parameters which are responsible for speed of convergence for deflection and a stress function, at the expense of what it is possible to increase speed of convergence of a repetitive process.

*Keywords:* stress-strain state, a closed cylindrical shell, the equation of von Karman type.

*Сыктывкарский государственный университет*

*Поступила 14.05.2012*