

УДК 519.6

ГРАНИЦЫ НАХОЖДЕНИЯ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ В РАЗНОМОДУЛЬНОЙ СРЕДЕ

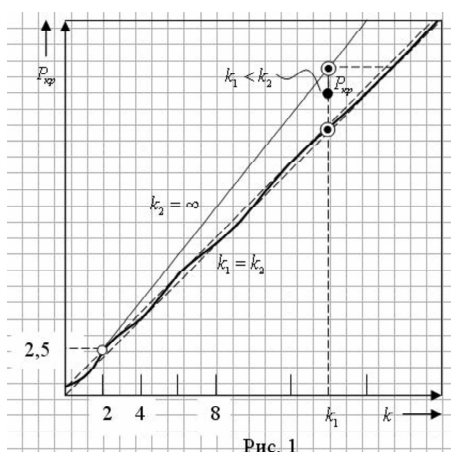
*В. Л. Никитенков, О. А. Жидкова,
Е. С. Шехурдина*

Рассматриваются результаты, полученные в работе [1], для случая разномодульных сред.

Ключевые слова: критическая нагрузка, жесткость среды, разномодульная среда.


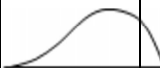

В работе [1] получены точные зависимости параметра критической нагрузки X (обозначения [1]; у нас λ) от параметра жесткости среды k с одной стороны стержня, когда с другой стороны стержня среда абсолютно жесткая. Результаты получены для случая шарнирного опирания концов стержня и приведены на рис. 1.

$$P(k) = \begin{cases} \frac{1+k^2}{2}, & k \leq 2 \\ \frac{5}{4}k, & k \geq 2. \end{cases}$$



Если среда разномодульная ($k_1 < k_2 < +\infty$), то P_{kr} при фиксированных k_1 и k_2 должна находиться на отрезке, заключенном между указанными графиками. Для других условий закрепления концов стержня картина должна быть аналогична данной. Угол наклона прямой при $k_2 = +\infty$ будет определяться, в конечном итоге, граничными условиями (наибольший угол наклона будет соответствовать условиям жесткой заделки, для смешанных граничных условий (шарнирное опирание — жесткая заделка) угол наклона будет меньше, а для граничных условий с жесткой заделкой и свободным концом он будет наименьшим). Выпишем возможные простые формы и формально допустимые цепочки для различных видов закрепления концов стержня, отличных от шарнирного опирания.

Простые формы

Форма	Граничные условия	Вид	Положение
δ	$y(0) = y'(0) = 0, y(0) > 0$ $y(l) = y'(l) = 0, y(l) > 0$		Единственная форма или произвольное положение
ϵ_{\pm}^+	$y(0) = y'(0) = 0, y(0)(=0)(>0)$ $y(l) = y'(l) = 0, y(l)(>0)(=0)$		
ξ	$y(0) = y'(0) = y(0) = 0$ $y(l) = y'(l) = y(l) = 0$		

Формально допустимые цепочки

№ п/п	Цепочка	Возможное наличие зон прилегания
1	(δ)	Нет
2	(δ, \dots, δ)	Нет
3	(ξ)	Две зоны по краям
4	(ξ, \dots, ξ)	Две зоны по краям и несколько в середине

Можно показать, что формы ϵ_{\pm}^+ не существуют.

В [1] приведено доказательство для ϵ^+ . Для формы ϵ_- из граничных условий $y(0) = y'(0) = 0$, имеем $C_2 = -\frac{n}{m}C_1$, $C_4 = -C_3$.

Из граничных условий $y(l) = y'(l) = 0$

$$\begin{aligned} (y(l) = 0, y'(l) = 0 : \Delta_1 = 0); \\ (y(l) = 0, y(l) = 0 : \Delta_2 = 0); \\ (y'(l) = 0, y(l) = 0 : \Delta_3 = 0) \end{aligned}$$

получаем

$$\cos nl \cdot \cos ml = 1 \Rightarrow \sin nl = 0, \sin ml = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} y(0) = C_3(m^2 - n^2)(-1)^m > 0 \\ C_3 \neq 0 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} y(l) = C_3(m^2 - n^2)(-1)^m = 0 \\ \zeta = 0 \end{aligned}$$

Далее, форма ξ допустима при $k \geq 0$ ($P_\zeta(k) = \frac{5}{3}k$, $l_\zeta(k) = \sqrt{\frac{3}{k}}\pi$)(см.[1]).

При $k < 0$ форма δ допустима. При этом справедливы утверждения:

1. $\lim_{k \rightarrow 0(m \rightarrow 0)} P_\delta(k) = 2$
2. $\lim_{k \rightarrow 3(m \rightarrow 1)} P_\delta(k) = 5 = \frac{5}{3}k$
3. $P_\delta(k) \uparrow$ при $k \in (0, 3)$

1) и 2) следуют из (1.14)^[1], а поведение $P_\delta(k)$ при $k \in (0, 3)$ показано на рис.2.

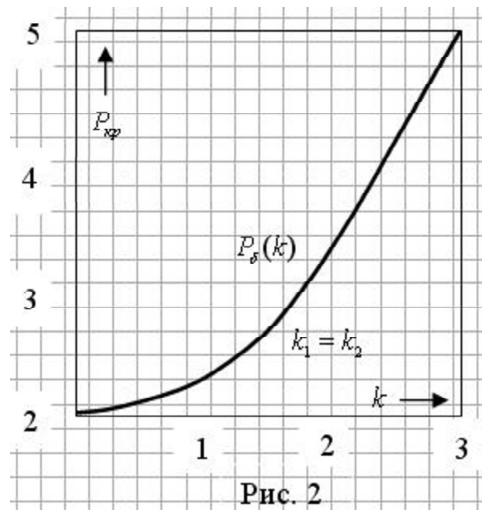
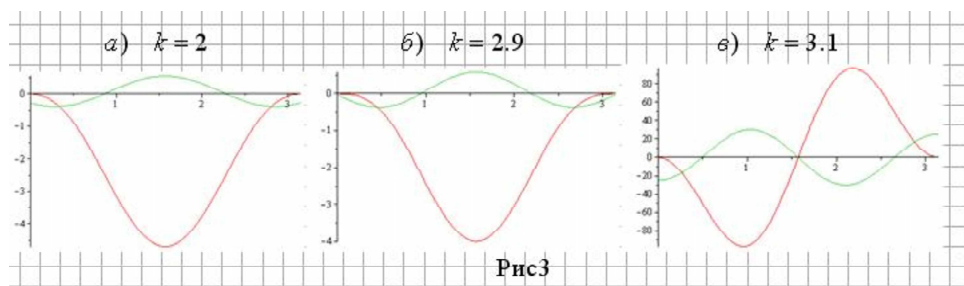


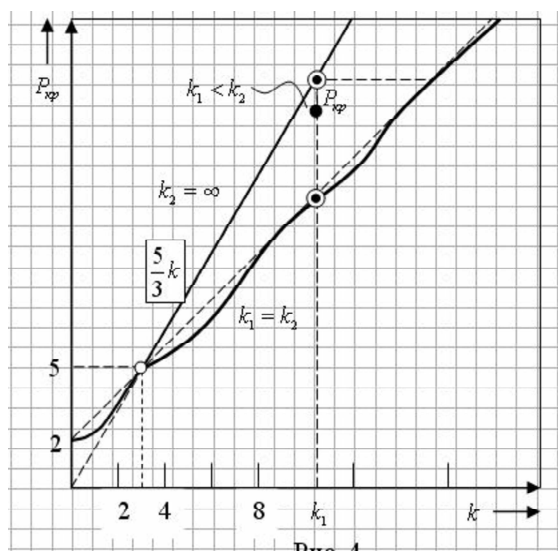
Рис. 2

Графики на рис.3 (а - в) показывают, что при $k \geq 3$ форма δ не является допустимой.



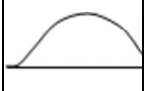
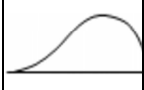
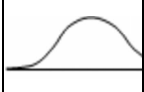


Таким образом, в случае жестко - заделанного стержня при наличии упругой среды с параметром k с одной стороны стержня и жесткого основания с другой имеем (см. рис.4)

$$P = \begin{cases} P_{\delta}(k)(k_1 = k_2), & k \leq 3 \\ \frac{5}{3}k, & k \geq 3 \end{cases}$$



Простые формы:

Форма	Граничные условия	Вид	Положение
β	$y(0) = y(l) = 0, y'(0) > 0$ $y(l) = y'(l) = 0, y(l) > 0$		Крайняя форма (лев)
γ	$y(0) = y(l) = 0,$ $y'(0)(> +0)(= -0)$		Крайняя форма (лев)
δ	$y(0) = y'(0) = 0, y(0) > 0$ $y(l) = y'(l) = 0, y(l) > 0$		Не крайняя форма
ϵ_{\pm}^+	$y(0) = y'(0) = y(l) = 0$ $y(l) = y'(l) = 0, y(l) > 0$		Не крайняя форма
ξ	$y(0) = y'(0) = y(l) = 0$ $y(l) = y'(l) = y(l) = 0$		Не крайняя форма

Формально допустимые цепочки:

№ п/п	Цепочка	Возможное наличие зон прилегания
1	(β)	Нет
2	$(\beta, \delta, \dots, \delta)$	Нет
3	(γ)	Одна зона с краю
4	$(\gamma, \xi, \dots, \xi)$	Несколько зон в середине и одна с краю
5	$(\gamma^+, \gamma^-, \dots, \gamma^+)$	

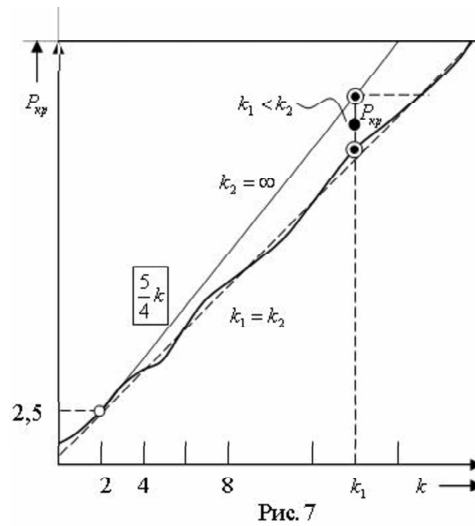
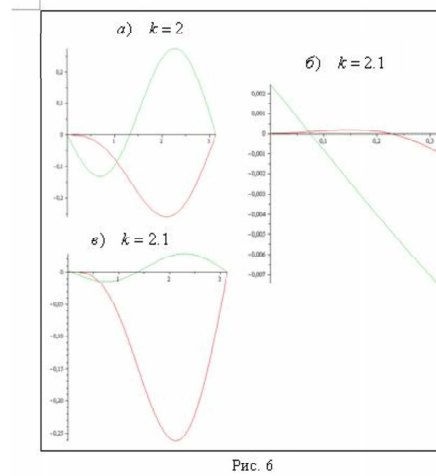
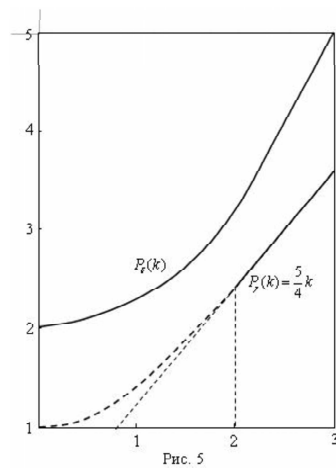
Верны следующие утверждения: (см.[1])

1. При $k \leq 2$ форма γ недопустима.
2. При $k \leq 2$ $P_{\beta}(k) < P_{\delta}(k)$ (см.рис.5).
3. При $k \geq 2$ форма β недопустима (см.рис.6 а)-г)).
4. Цепочки 2 и 4 не являются минимальными.

5. Минимальные цепочки (β) при $k \leq 2$, (γ^+) и ($\gamma^+\gamma^-\dots\gamma_+$) при $k \geq 2$.

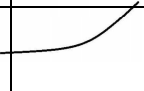


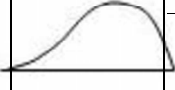
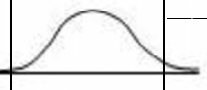
Итак, если стержень жестко заделан на одном конце и шарнирно оперт на другом при наличие упругой среды с параметром k с одной стороны стержня и жесткого основания с другой, получаем (см.рис.7)

$$P_{кр}(k) = \begin{cases} P_{\beta}(k)(k_1 = k_2), & k \leq 2; \\ \frac{5}{4}k, & k \geq 2. \end{cases}$$



3. Жесткая заделка и свободный край

Простые формы:

Форма	Граничные условия	Вид	Положение
ξ	$y(0) = y'(0) = 0, y''(0) > 0$ $y'''(l) + 2\lambda y'(l) = 0, y''(l) = 0$		Единственная или крайняя правая форма
Ω	$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ $y'''(l) + 2\lambda y'(l) = 0, y''(l) = 0$		Единственная или крайняя правая форма
δ	$y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) > 0$ $y(l) = y'(l) = 0, y''(l) > 0$		Не крайняя правая форма
ϵ_{\pm}^{\pm}	$y(0) = y'(0) = 0, y'''(0) (\pm 0) (\mp 0)$ $y(l) + y'(l) = 0, y''(l) (> 0) (= 0)$		
ζ	$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ $y(l) = y'(l) = y''(l) = 0$		

Формально допустимые цепочки

№ п/п	Цепочка	Возможное наличие зон прилегания
1	(ξ)	Нет
2	($\delta \dots \delta \xi$)	Нет
3	(Ω)	Одна зона с левого края
4	($\zeta \dots \zeta \Omega$)	Несколько зон в середине и одна зона с левого края

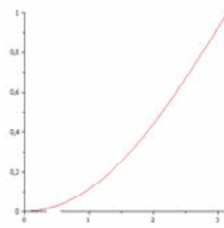
Так как $P_{\delta}(k) > k$ и $P_{\zeta}(k) > k$, то минимальными цепочками могут быть только 1 и 3. Справедливо следующее:

1. Форма ξ допустима при $k \leq \tilde{k} = 0.56262$ для $l = \pi$
2. При $k \geq \tilde{k}$ допустима форма Ω для $l = \sqrt{\frac{\tilde{k}}{k}}\pi$ (см. рис. 8 а)-е))

Таким образом, минимальными формами (и цепочками) для стержня с одним жестко-защемленным концом, а на другой свободный конец, которого действует вертикальная сила в случае упругой среды с параметром k с одной стороны и абсолютно жесткой среды с другой будут формы ξ и Ω

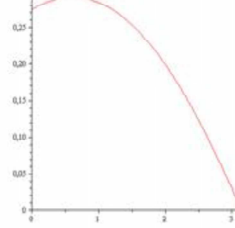
$$P_{кр}(k) = \begin{cases} P_{кр}(k)(k_1 = k_2), & \text{при } k \leq \tilde{k} = 0.56262 \text{ для } l = \pi; \\ 0.629192 \cdot k, & \text{при } k \geq \tilde{k} \text{ для } l = \sqrt{\frac{\tilde{k}}{k}}\pi \text{ (см. рис. 9 а,б)}. \end{cases}$$

$k=0.2$ w $P/k=0.8015$

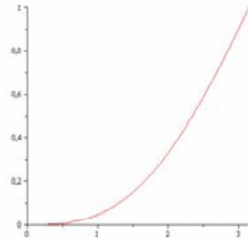


а)

w'' ($l = \pi$)

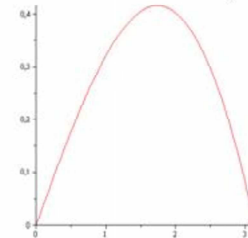


$k=\tilde{k}=0.56262$ w $P/k=0.629192$

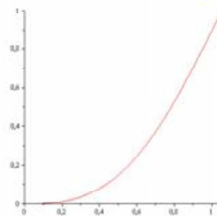


б)

w'' ($l = \pi$)

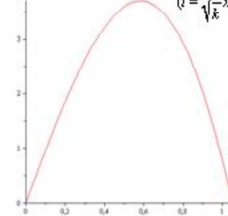


$K=5$ w $P/k=0.629192$



в)

w'' ($l = \sqrt{\frac{\tilde{k}}{k}}\pi = 0.335\pi$)



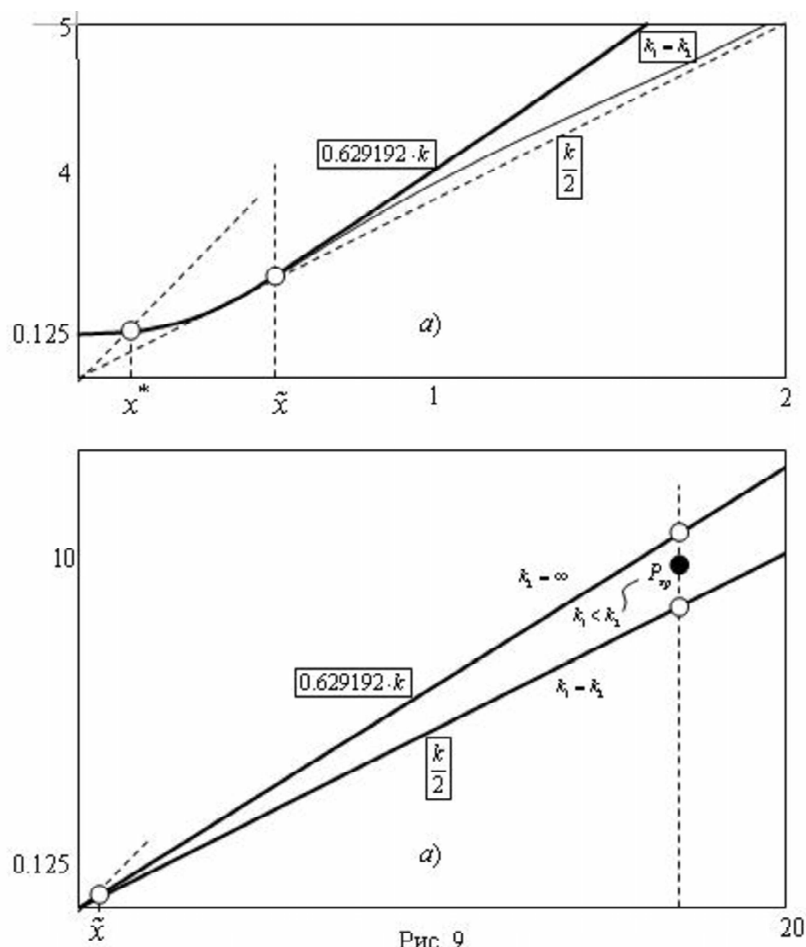


Рис. 9

Литература

1. **Холопов А.А.** Минимальные формы потери устойчивости стержня на границе жесткой и упругой сред // Вестн. Сыктывкарск. ун-та. Сер. 1. - 1995. - Вып. 1. - С. 217 - 233
2. **Вольмир А.С.** Устойчивость деформируемых систем. - М.:Наука, 1967. - 984с.

Summary

Nikitenkov V. L., Jidkova O. A., Shekhurdina E. S. The boundaries of finding the critical force in the environment multimodulus

The results obtained in [1] for the case multimodulus environments.

Keywords: critical load, stiffness, medium, medium multimodulus.

Сыктывкарский государственный университет

Поступила 15.06.2012