

УДК 539.3

ВНУТРЕННИЕ НАПРЯЖЕНИЯ СИММЕТРИЧНЫХ ИЗДЕЛИЙ В ПРОЦЕССЕ ИХ ФОРМИРОВАНИЯ С УЧЕТОМ НЕНУЛЕВОЙ КРИТИЧЕСКОЙ ГЛУБИНЫ КОНВЕРСИИ

Н. А. Беляева

На основе математических моделей объемного формирования цилиндрического и сферического изделия в процессе фазового перехода жидкость-твердое тело разработаны формулы определения напряженного состояния симметричных изделий с учетом ненулевой критической глубины конверсии твердеющего материала. Указанные модели основаны на решении интегрального уравнения Больцмана-Вольтерры.

Ключевые слова: отверждение, объемный режим, интегральное уравнение, ненулевая критическая глубина конверсии.

1. Введение

Результаты исследования процессов формирования симметричных изделий, основанные на методе определения напряженного состояния посредством рассмотрения интегрального уравнения, представлены, к примеру, в работах [1]– [6]. Формирование (отверждение) изделий происходит в неизотермических условиях при параллельном протекании реакций полимеризации и кристаллизации. Определение динамики температурного и конверсионных полей проводится на основе уравнения теплопроводности и двух кинетических уравнений относительно степеней полимеризации и кристаллизации. В зависимости от условий проведения процесса отверждения реализуется объемный или фронтальный режим реакции.

В указанных выше работах определение компонент тензора напряжений в случае объемного режима производится с начального момента

полимеризации исходной мономерной жидкости (нулевая критическая глубина конверсии).

При реализации фронтального режима напряженное состояние в произвольной точке образца рассматривается с момента присоединения этой точки к твердому слою. Таким образом, в данных задачах, решаемых с точки зрения непрерывно нарастающего твердого тела, критическая глубина конверсии отлична от нуля. При этом на подвижной границе фронта учитывается давление жидкого слоя на образовавшийся твердый слой.

Хорошо известно, что процесс формирования неустойчив по отношению к реализуемому режиму реакции: объемный режим при определенных условиях может перейти во фронтальный (односторонний или двусторонний) и наоборот. Переход объемного режима в двусторонний фронт рассмотрен в работах [4]– [8]. Здесь ставятся граничные условия на двух подвижных границах фронта. Последние определяются условием достижения степени полимеризации критического значения. Напряженное состояние в твердом слое определяется модифицированными формулами фронтального отверждения.

В данной работе представлен метод определения напряженного состояния объемно формируемого изделия с учетом граничных условий между сосуществующими твердой и жидкой фазами. Границы твердого слоя, также как во фронтальных режимах, определяются условием достижения степени полимеризации критического значения.

2. Формирование цилиндрического изделия

Процесс объемного формирования изделия характеризуется постепенным углублением полимеризации (отверждения) и следующей за ней кристаллизацией по всему рассматриваемому объему. На рис. 1 показано пространственно-временное распределение степени полимеризации (отверждения). Границы r_1^* и r_2^* твердого слоя Ω в указанный на рисунке момент времени (кривая 2) определяются условием $\alpha(r, t) = \alpha^*$, где α^* — критическая глубина конверсии, т.е. значение степени полимеризации $\alpha(r, t)$, при котором материал начинает “чувствовать” напряжение ($\alpha^* = 0.4 \div 0.6$).

Метод определения напряженного состояния в ходе отверждения основан на решении уравнения последдействия Больцмана-Вольтерры:

$$\varphi(\varepsilon) = \sigma(t) + \int_{\tau=0}^{\tau=t} K(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau,$$

где $\varphi(\varepsilon)$ — некоторая функция деформации, $K(t - \tau)$ — так называемое ядро последствия.

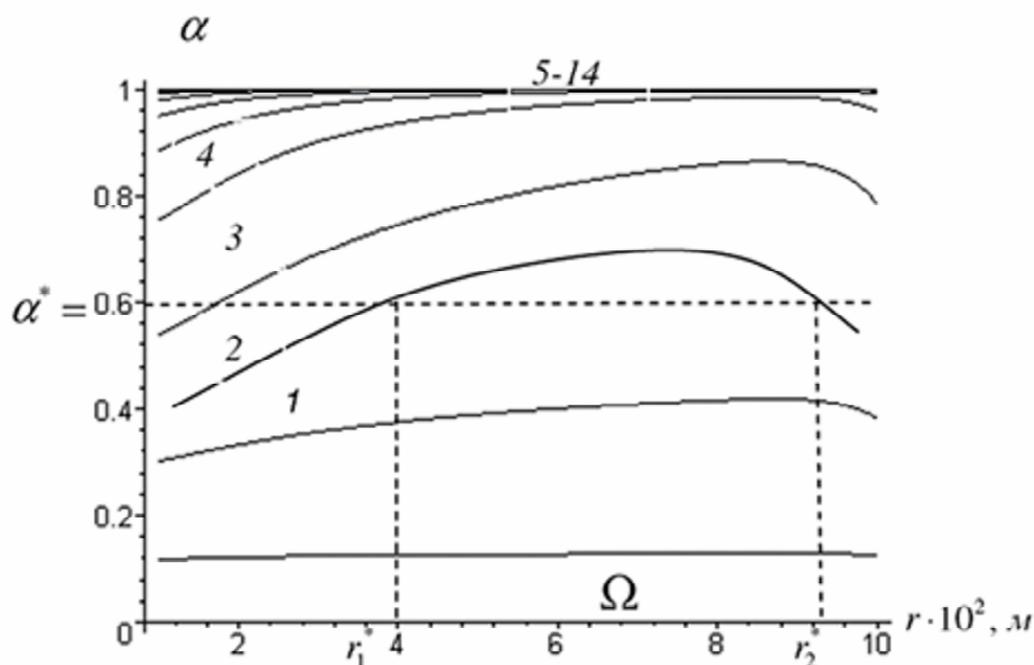


Рис. 1: Динамика степени полимеризации $\alpha = \alpha(r, t)$
 $t(c)$: 0(0), 84(1), 168(2), 253(3), 337(4), 421(5), 505(6), 589(7), 674(8), 758(9),
 842(10), 926(11), 1010(12), 1095(13), 1179(14)

В случае объемного режима реакции пространственно-временное поведение отверждающегося материала (область Ω) можно полностью описать следующей системой определяющих соотношений, справедливых в общем случае неупругой сплошной среды:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} = \frac{\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}}{r}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial r} = \frac{\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi}}{r}, \quad (2)$$

(1) — уравнение равновесия, (2) — условие совместности деформаций;
 σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$ — радиальная и окружная компоненты тензора напряжения;
 ε_{rr} , $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ — соответствующие компоненты тензора деформации. Полные

компоненты деформации в (2) являются суммой вязкоупругой ε^* , температурной $\varepsilon^T = \alpha_0(T - T_0)$ и химической $\varepsilon^{ch} = \varepsilon_p + \varepsilon_{cr}$, составляющих ($\varepsilon_p = k_1\alpha$, $\varepsilon_{cr} = k_2\eta$ — усадки вследствие полимеризации и кристаллизации, соответственно):

$$\varepsilon = \varepsilon^* + \varepsilon^T + \varepsilon^{ch}. \quad (3)$$

Здесь α_0 — аналог коэффициента линейного температурного расширения материала; для простоты будем считать его постоянным; k_1 , k_2 — константы.

Считая слой Ω твердым, а остальную часть объема жидкой, вязкоупругую компоненту деформации будем искать в тензорном виде

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}^*(r, t) \\ \varepsilon_{\varphi\varphi}^*(r, t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/E & -\nu/E \\ -\nu/E & 1/E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{rr}(r, t) \\ \sigma_{\varphi\varphi}(r, t) \end{pmatrix} + \\ &+ \int_{t^*(r)}^t \begin{pmatrix} f_{rr}(t-\tau) & f_{r\varphi}(t-\tau) \\ f_{\varphi r}(t-\tau) & f_{\varphi\varphi}(t-\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{rr}(r, \tau) \\ \sigma_{\varphi\varphi}(r, \tau) \end{pmatrix} d\tau, \end{aligned} \quad (4)$$

где $t^*(r)$ — момент присоединения точки r к твердому слою Ω .

Применение преобразования Лапласа к выражениям компонент тензора вязкоупругой деформации (4) позволяет определить по аналогии с работой [1] неизвестные функции f_{ij} . Так, для стандартной модели вязко-упругого тела

$$f_{rr}(t) = \frac{\lambda - \mu}{E} e^{-\mu t}, \quad (5)$$

$$f_{rr} = f_{\varphi\varphi}, \quad f_{r\varphi} = f_{\varphi r} = -f_{rr}.$$

Здесь

$$\lambda = (E_1 + E_2)/\beta, \quad E_1 = E = \text{const}; \quad E_2 = 3 \cdot 10^{10}(T_f/T - 1);$$

$$\mu = E_2/\beta, \quad \beta = \beta_1\eta/(\eta_p - \eta), \quad \beta_1 = A \exp(-E/R_u T + A_1\alpha).$$

Для определения компонент напряжений, вводится в рассмотрение функция напряжений $\Phi = \Phi(r, t)$:

$$\sigma_{rr}(r, t) = \frac{\Phi}{r}, \quad \sigma_{\varphi\varphi}(r, t) = \frac{\partial\Phi}{\partial r}, \quad (6)$$

для которой условие (1) очевидно выполняется. Подстановка полных компонент деформации (3) в уравнение совместности (2), с учетом введенной функции (5), приводит к следующему уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial \Phi(r, t)}{\partial r} + \frac{\Phi(r, t)}{r} + \int_{t^*}^t \tilde{f}(t - \tau) \left(\frac{\partial \Phi(r, \tau)}{\partial r} + \frac{\Phi(r, \tau)}{r} \right) d\tau \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[E \left(\Theta_\varphi + \int_{r_1^*}^r \frac{\Theta_r - \Theta_\varphi}{r} dr \right) \right] = 0,$$

где $\tilde{f}(t) = E f_{rr}(t)$; $r_1^* \leq r \leq r_2^*$, т.е. $r \in \Omega$; $t^* = t^*(r)$. Интегрируя последнее равенство, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(r, t)}{\partial r} + \frac{\Phi(r, t)}{r} + \int_{t^*}^t \tilde{f}(t - \tau) \left(\frac{\partial \Phi(r, \tau)}{\partial r} + \frac{\Phi(r, \tau)}{r} \right) d\tau = \\ = -E \left(\Theta_\varphi + \int_{r_1^*}^r \frac{\Theta_r - \Theta_\varphi}{r} dr \right) + \Psi(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Найдем функцию $\Psi(t)$. Следуя (6), имеем:

$$\frac{\Phi(r, t)}{r} + \frac{\partial \Phi(r, t)}{\partial r} = \sigma_{rr}(r, t) + \sigma_{\varphi\varphi}(r, t).$$

Выразим из соотношения (7) искомую функцию:

$$\Psi(t) = \sigma_{rr}(r, t) + \sigma_{\varphi\varphi}(r, t) + \int_{t^*}^t \tilde{f}(t - \tau) (\sigma_{rr}(r, \tau) + \sigma_{\varphi\varphi}(r, \tau)) d\tau + F(r, t),$$

где функция

$$F(r, t) = -E \left(\Theta_\varphi + \int_{r_1^*}^r \frac{\Theta_r - \Theta_\varphi}{r} dr \right) \quad (8)$$

определяется решением уравнения теплопроводности и кинетических уравнений, $\Theta_i(r, t) = \varepsilon^{ch} + \varepsilon^T$.

Зададим на внутренней границе твердой части объема равенство нулю суммы нормальных напряжений, т.е.

$$r = r_1^* : \quad \sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} = 0,$$

тогда

$$\Psi(t) = F(r_1^*, t). \quad (9)$$

Уравнение (7) представим в виде системы:

$$\Phi(r, t) + \int_{t^*}^t \tilde{f}(t - \tau) \Phi(r, \tau) d\tau = J(r, t), \quad (10)$$

$$\frac{\partial J(r, t)}{\partial r} + \frac{J(r, t)}{r} = F(r, t) + \Psi(t). \quad (11)$$

Второе соотношение (11) с учетом (9) разрешается аналитически:

$$J(r, t) = -\frac{1}{r} \int_r^{r_2^*} F(r, t) r dr + \frac{1}{2r} F(r_1^*, t) (r_2^{*2} - r^2). \quad (12)$$

Для нахождения функции напряжений $\Phi(r, t)$ из уравнения (10) применим преобразование Лапласа. Введем функции:

$$\tilde{\Phi}(r, t) = \begin{cases} 0, & t < t^* \\ \Phi(r, t), & t \geq t^* \end{cases}; \quad \tilde{J}(r, t) = \begin{cases} 0, & t < t^* \\ J(r, t), & t \geq t^* \end{cases},$$

относительно которых справедливо уравнение аналогичное (10):

$$\tilde{\Phi}(r, t) + \int_0^t \tilde{f}(t - \tau) \tilde{\Phi}(r, \tau) d\tau = \tilde{J}(r, t).$$

Применим к последнему соотношению преобразование Лапласа, тогда относительно изображений $\tilde{\Phi}(r, p)$, $\tilde{J}(r, p)$ с учетом (5) получим выражение:

$$\tilde{\Phi}(r, p) + (\lambda - \mu) \frac{\tilde{\Phi}(r, p)}{p + \mu} = \tilde{J}(r, p)$$

или

$$\tilde{\Phi}(r, p) = \frac{p + \mu}{p + \lambda} \tilde{J}(r, p).$$

Следовательно, оригиналы связаны уравнением:

$$\tilde{\Phi}(r, t) = \tilde{J}(r, t) - \int_0^t (\lambda - \mu) \exp[-\lambda(t - \tau)] \tilde{J}(r, \tau) d\tau.$$

Из последнего соотношения получим выражение для функции напряжений:

$$\Phi(r, t) = J(r, t) - \int_{t^*}^t (\lambda - \mu) \exp[-\lambda(t - \tau)] J(r, \tau) d\tau.$$

Тогда, следуя (6), для компонент тензора напряжений — радиальной и окружной — получим формулы:

$$\sigma_{rr}(r, t) = \frac{1}{r} \left\{ J(r, t) - \int_{t^*}^t (\lambda - \mu) \exp[-\lambda(t - \tau)] J(r, \tau) d\tau \right\}, \quad (13)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r, t) = \frac{\partial J(r, t)}{\partial r} - \int_{t^*}^t (\lambda - \mu) \exp[-\lambda(t - \tau)] \frac{\partial J(r, \tau)}{\partial r} d\tau. \quad (14)$$

Обозначим момент времени t появления твердой части Ω через t_0^* и для определения напряженного состояния формируемого изделия по формулам (13), (14) зададим начальные и граничные условия:

$$0 \leq t < t_0^*, \quad \Omega = \emptyset: \quad \sigma_{rr}(r, t) = 0, \quad \sigma_{\varphi\varphi}(r, t) = 0; \quad (15)$$

$$t \geq t_0^*: \quad (\sigma_{rr}(r, t) + \sigma_{\varphi\varphi}(r, t))|_{r=r_1^*} = 0, \quad \sigma_{rr}(r, t)|_{r=r_2^*} = 0. \quad (16)$$

3. Формирование сферического изделия

В случае сферического изделия вязкоупругая компонента деформации в твердом слое Ω находится в виде

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}^*(r, t) \\ \varepsilon_{tt}^*(r, t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/E & -2\nu/E \\ -\nu/E & (1-\nu)/E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{rr}(r, t) \\ \sigma_{tt}(r, t) \end{pmatrix} + \\ &+ \int_{t^*(r)}^t \begin{pmatrix} f_{rr}(t-\tau) & f_{rt}(t-\tau) \\ f_{tr}(t-\tau) & f_{tt}(t-\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{rr}(r, \tau) \\ \sigma_{tt}(r, \tau) \end{pmatrix} d\tau, \end{aligned} \quad (17)$$

а функции f_{ij} удовлетворяют [1] условиям:

$$f_{rt} = -f_{rr}, \quad f_{tr} = -\frac{1}{2}f_{rr}, \quad f_{tt} = \frac{1}{2}f_{rr}.$$

Компоненты тензора напряжений $\sigma_{rr}(r, t)$ $\sigma_{tt}(r, t)$ определяются решением системы уравнений, полученной после подстановки полных компонент деформации, вязкоупругая из которых определяется тензорным соотношением (17), в условие совместности деформации для сферы:

$$\frac{\partial \varepsilon_{tt}}{\partial r} = \frac{\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{tt}}{r}.$$

Указанная система имеет вид:

$$\begin{aligned} \chi(r, t) &= \frac{\partial \sigma_{tt}}{\partial r} - \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{tt}), \\ \chi(r, t) + \int_{t^*(r)}^t \tilde{f}_{rr}(t - \tau) \chi(r, \tau) d\tau &= F_1(r, t), \\ \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{tt}) &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь

$$\tilde{f}_{rr} = \frac{E f_{rr}}{2(1 - \nu)}, \quad F_1(r, t) = \frac{F(r, t)}{1 - \nu},$$

где функция $F(r, t)$ определяется формулой аналогичной (8):

$$F(r, t) = -E \left(\Theta_t + \int_{r_1^*}^r \frac{\Theta_r - \Theta_t}{r} dr \right).$$

Заметим, если при $t = t^*$ твердая часть изделия $\Omega = [r_1^*, r_2^*]$, то

$$\chi(r_1^*, t^*) = F_1(r_1^*, t^*), \quad \chi(r_2^*, t^*) = F_1(r_2^*, t^*).$$

Систему (18) дополним начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} 0 \leq t < t_0^*, \quad \Omega = \emptyset: \quad \sigma_{rr}(r, t) &= 0, \quad \sigma_{tt}(r, t) = 0; \\ t \geq t_0^*: \quad \sigma_{rr}(r, t) |_{r=r_1^*} &= 0, \quad \sigma_{rr}(r, t) |_{r=r_2^*} = 0. \end{aligned}$$

4. Заключение

В работе представлены формулы определения уровня внутренних напряжений синтезируемых полимерных цилиндрических и сферических изделий. Принято условие ненулевой критической глубины конверсии отверждаемого материала. В работе не затрагиваются вопросы определения температурного и конверсионного полей в ходе реакции, поскольку эти вопросы рассмотрены достаточно подробно в ранее опубликованных работах.

Для завершения исследований по математическому моделированию процессов в условиях, поставленных в данной статье, необходимо провести численный анализ и широкий численный эксперимент.

Литература

1. **Беляева Н. А.** Математические модели деформируемых структурированных материалов. Монография. — изд-во СыктГУ, 2008. — 116 с.
2. **Беляева Н. А.** Деформирование вязкоупругих материалов с изменяющейся структурой // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер 1. Вып. 11. 2010. С. 52-75.*
3. **Беляева Н. А.** Структурные модели деформирования полимерных и композитных материалов // *Материалы Второй международной конференции "Математическая физика и ее приложения", Самара, 29 августа – 4 сентября 2010 г. Самара: Изд-во "Книга" — 2010. — С. 49-50.*
4. **Беляева Н. А.** Деформирование вязкоупругих структурированных систем: монография. — Lap Lambert Academic Publishing GmbH & Co. KG, Germany, 2011. — 200 с.
5. **Жакова Е. А., Беляева Н. А.** Термовязкоупругая модель отверждения цилиндрического изделия с учетом граничных условий между твердой и жидкой фазами // *Труды седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием "Математическое моделирование и краевые задачи", 3-6 июня 2010 г., г. Самара. С. 144-147.*
6. **Беляева Н. А., Довжко Е. С.** Напряженное состояние фронтально формируемого сферического изделия // *Вестн. Удмурт-*

ского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. — Вып. 2. — С. 123–134.

7. **Жакова Е. А., Беляева Н. А.** Объемное отверждение цилиндрического изделия в условиях термовязкоупругости при ненулевой критической глубине конверсионного поля. Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам РФ, Реестр программ для ЭВМ. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2010615790, 7 сентября 2010 г.
8. **Довжко Е. С., Беляева Н. А.** Термовязкоупругое фронтальное отверждение сферического изделия с точки зрения непрерывно наращиваемого твердого тела с учетом давления перед фронтом отверждения. Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам РФ, Реестр программ для ЭВМ. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2010615793, 7 сентября 2010 г.

Summary

Belyaeva N. A. Internal stresses symmetric products in their formation based nonzero critical depth conversion

Based on mathematical models form the bulk cylindrical and spherical product during the phase transition liquid-solid developed formulas for determining the stress state of the symmetric product with regard to the conversion of a non-zero critical depth of hardening of the material. These models are based on the solution of the integral of the Boltzmann-Volterra. *Keywords: hardening, bulk mode, the integral equation, a nonzero critical depth conversion.*

Сыктывкарский государственный университет

Поступила 21.02.2012