

УДК 539.376

**МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭКСТРУЗИИ
КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА**

Н. А. Беляева, Е. А. Прянишникова

Представлено решение задачи о выдавливании сжимаемого композитного материала из цилиндрической камеры в направляющий калибр под действием плунжера прессы через формующую матрицу с применением метода усреднения.

Ключевые слова: экструзия, сжимаемый композит, реологические уравнения, метод усреднения.

1. Введение

Работа является продолжением [1] — [7] исследований композитных сжимаемых структурированных материалов в процессах плунжерной экструзии, проводимых на кафедре математического моделирования и кибернетики Сыктывкарского государственного университета. Так в работах [1] — [4] рассматриваются математические модели изотермической экструзии вязкоупругого композитного структурированного материала, в [5] — [7] представлена модель неизотермической экструзии. В работе [7] анализируется влияние ультразвуковой волны на процесс уплотнения материала. В настоящей работе рассматривается двумерная постановка задачи с учетом трения материала о стенки камеры и формующей матрицы — переходной зоны между камерой и калибром.

2. Постановка задачи

Рассмотрим математическую модель плунжерной экструзии композитного сжимаемого материала с учетом переходной зоны между камерой в калибром — формирующей матрицы (рис. 1): движение экструдруемого материала происходит в трех областях — камера (I), формирующая матрица (II) и направляющий калибр (III).

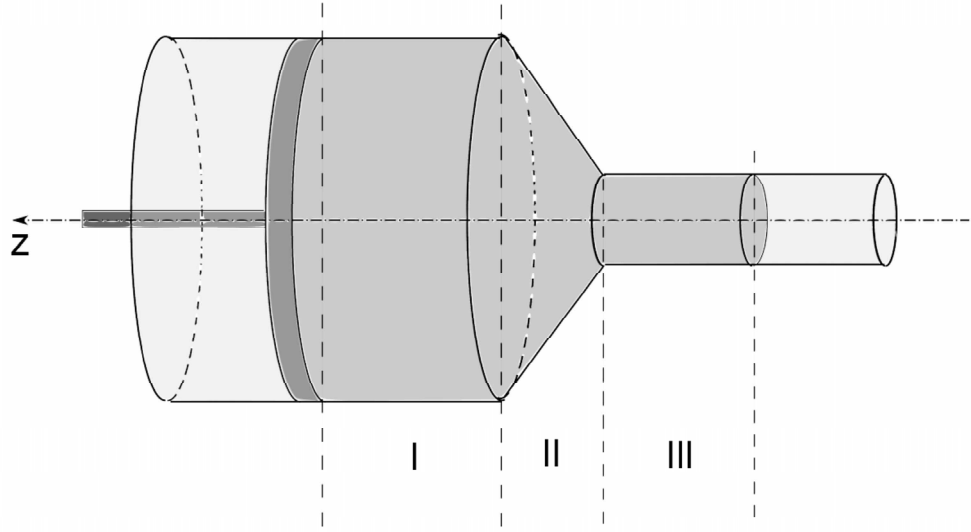


Рис. 1: Модель экструдера

Такой процесс описывается системой уравнений относительно плотности материала ρ , скорости движения \vec{V} , тензора напряжений Π , температуры T и степени структурирования среды a :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left(\vec{F} - \frac{d\vec{V}}{dt} \right) + \operatorname{div}(\Pi) = 0, \quad (2)$$

$$\Pi = \left(-p + \left(\xi - \frac{2}{3}\mu \right) \operatorname{div}(\vec{V}) \right) I + 2\mu \dot{\Gamma}, \quad (3)$$

$$\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla T \right) = \operatorname{div}(\lambda \nabla T) + \sigma_{ik}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \vec{V} \cdot \operatorname{grad} a = D \Delta a + \varphi(a, \gamma). \quad (5)$$

Соотношения (1), (2) — уравнения неразрывности и движения, соответственно, (3) — дифференциальное уравнение состояния (обобщенная модель Ньютона), здесь Γ — тензор скоростей деформации, I — единичный тензор, μ — сдвиговая вязкость экструдруемой среды, $\xi = \frac{4}{3}\mu$ —

вторая (объемная) вязкость, $\Pi = \{\sigma_{ij}, i, j = \{r, \varphi, z\}\}$. Соотношение (4) – уравнение переноса тепла, (5) – диффузионно-кинетическое уравнение относительно степени структурирования материала.

Предполагается, что заготовка осесимметрична, т.е. функции, описывающие поведение материала, не зависят от угла поворота φ : $\rho = \rho(r, z, t)$, $\vec{V} = (V_r(r, z, t), V_\varphi(r, z, t), V_z(r, z, t))$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(r, z, t)$, тангенциальные напряжения $\tau_{r\varphi}$ и $\tau_{\varphi z}$ положим равными нулю, тогда угловая компонента скорости $V_\varphi = 0$, $T = T(r, z, t)$, $a = a(r, z, t)$.

Предположим, что радиальная компонента скорости V_r равна нулю.

В рамках принятых допущений рассмотрим решение уравнений (1) – (3) системы (1) – (5), запишем их в проекциях на оси координат:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial z} V_z + \rho \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0, \quad (8)$$

$$\tau_{rz} = 2\mu \frac{\partial V_z}{\partial r}, \quad (9)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} = \left(\xi - \frac{2}{3}\mu \right) \frac{\partial V_z}{\partial z}, \quad (10)$$

$$\sigma_{zz} = \left(\xi + \frac{4}{3}\mu \right) \frac{\partial V_z}{\partial z}, \quad (11)$$

с начальными и граничными условиями:

$$\rho \Big|_{t=0} = \rho_0, V_z \Big|_{t=0} = 0, \sigma_{rr} \Big|_{t=0} = 0, \sigma_{\varphi\varphi} \Big|_{t=0} = 0, \sigma_{zz} \Big|_{t=0} = 0, \tau_{rz} \Big|_{t=0} = 0, \quad (12)$$

$$\tau_{rz} \Big|_{r=R_1} = \tau_{fr}, V_z \Big|_{r=R_1} = 0, \frac{\partial \rho}{\partial z} \Big|_{z=H(t)} = 0. \quad (13)$$

3. Метод усреднения

Для решения поставленной задачи применим метод усреднения по радиусу [8] к реологическим соотношениям Ньютона (9) — (11). Среднее значение функции $f(r)$ будем находить по правилу:

$$\overline{f(r)} = \frac{2}{R_1^2} \int_0^{R_1} r f(r) dr.$$

Усредним соотношение (9):

$$\overline{\tau_{rz}} = 2\mu \overline{\frac{\partial V_z}{\partial r}},$$

здесь $\overline{\tau_{rz}}$ — среднее значение по радиусу функции τ_{rz} .

Преобразуем правую часть полученного равенства:

$$2\mu \overline{\frac{\partial V_z}{\partial r}} = 2\mu \cdot \overline{\frac{\partial V_z}{\partial r}};$$

$$\overline{r \frac{\partial V_z}{\partial r}} = \frac{2}{R_1^2} \int_0^{R_1} r \frac{\partial V_z}{\partial r} r dr = \frac{2}{R_1^2} \int_0^{R_1} r^2 \frac{\partial V_z}{\partial r} dr = \frac{2}{R_1^2} \left(r^2 V_z \Big|_0^{R_1} - \int_0^{R_1} 2r V_z dr \right).$$

Согласно граничным условиям $r^2 V_z \Big|_0^{R_1} = 0$, тогда

$$\overline{r \frac{\partial V_z}{\partial r}} = -2 \frac{2}{R_1^2} \int_0^{R_1} r V_z dr = -2 \overline{V_z}$$

Найдем среднее значение радиуса \bar{r} :

$$\bar{r} = \frac{2}{R_1^2} \int_0^{R_1} r^2 dr = \frac{2}{R_1^2} \left(\frac{r^3}{3} \Big|_0^{R_1} \right) = \frac{2}{R_1^2} \cdot \frac{R_1^3}{3} = \frac{2}{3} R_1,$$

тогда

$$\frac{\overline{\partial V_z}}{\partial r} = \frac{\overline{r \frac{\partial V_z}{\partial r}}}{\bar{r}} = -\frac{2 \overline{V_z}}{\frac{2}{3} R_1} = -\frac{3 \overline{V_z}}{R_1}.$$

Преобразованное таким образом соотношение (9) запишется в виде:

$$\overline{\tau_{rz}} = -\frac{6\mu}{R_1} \overline{V_z}.$$

Среднее значение касательного напряжения τ_{rz} найдем из второго соотношения в (13): поскольку $\overline{\tau_{rz}}$ — функция, усредненная по радиусу, ее значение от r не зависит, а значит,

$$\overline{\tau_{rz}} = \tau_{rz} \Big|_{r=R_1} = \tau_{fr}.$$

Система уравнений, определяющих напряженно-деформированное состояние экструдруемого материала примет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial z} V_z + \rho \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0, \quad (16)$$

$$\overline{\tau_{rz}} = -6 \frac{\mu}{R_1} \overline{V_z}, \quad (17)$$

$$\overline{\sigma_{\varphi\varphi}} = \overline{\sigma_{rr}} = \left(\xi - \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial \overline{V_z}}{\partial z}, \quad (18)$$

$$\overline{\sigma_{zz}} = \left(\xi + \frac{4}{3} \mu \right) \frac{\partial \overline{V_z}}{\partial z}, \quad (19)$$

начальные и граничные условия:

$$\rho \Big|_{t=0} = \rho_0, \overline{V_z} \Big|_{t=0} = 0, \quad (20)$$

$$\overline{\sigma_{rr}} \Big|_{t=0} = 0, \overline{\sigma_{\varphi\varphi}} \Big|_{t=0} = 0, \overline{\sigma_{zz}} \Big|_{t=0} = 0, \overline{\tau_{rz}} \Big|_{t=0} = 0, \quad (21)$$

$$\overline{\tau_{rz}} = \tau_{fr}, \frac{\partial \rho}{\partial z} \Big|_{z=H(t)} = 0. \quad (22)$$

Из соотношения (17) выразим среднее значение скорости:

$$\overline{V_z} = -\frac{R_1 \overline{\tau_{rz}}}{6\mu}.$$

Из соотношений (15)—(16) на основании среднего значения скорости найдем угловую, радиальную и осевую компоненты напряжения; используя уравнение (14), определим плотность экструдруемого материала.

4. Некоторые результаты численного эксперимента

Численное решение задачи выполнено с использованием программы, разработанной в среде *CodeGearStudio*. Ниже представлены некоторые результаты численного эксперимента для начального линейного распределения плотности

$$\rho_0(z) = \rho_0 + (\rho_m - \rho_0) \frac{z}{H(t)}.$$

На рисунках 2 —4 представлена динамика изменения усредненных

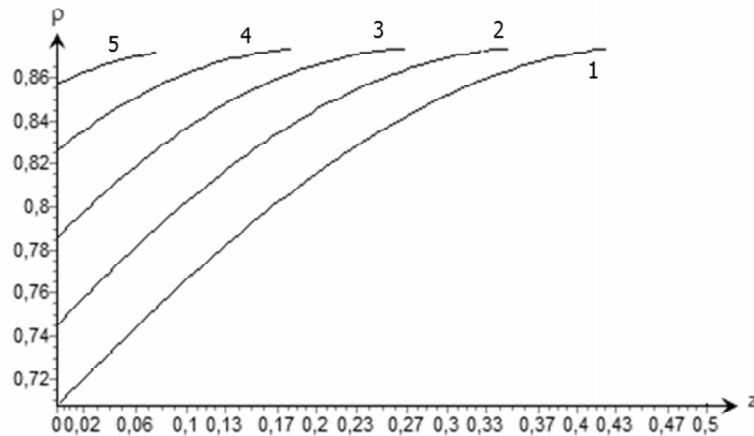


Рис. 2: Распределение усредненной плотности $\rho = \rho(z, t)$ в камере; $t(c) : 1(1,09), 2(1,39), 3(1,69), 4(1,98), 5(2,18)$

плотности, скорости и напряжения в камере и матрице. представленные варианты счета показывают монотонный характер поведения функций, описывающих течение материала.

Значения параметров задачи: $R_1 = 0.2$ м, $R_2 = 0.04$ м, — радиусы камеры и калибра, соответственно, $\rho_1 = 1500$ кг/м³, $\rho_0 = 0.5$ кг/м³ — начальное значение плотности на отверстии, $\rho_m = 0.7$ кг/м³ — начальное значение плотности на плунжере, $\mu_0 = 10^9$ Па · с — вязкость несжимаемой основы материала, $\tau_{fr} = 10^7$ Па. Время выдавливания составляет 2,43 с.

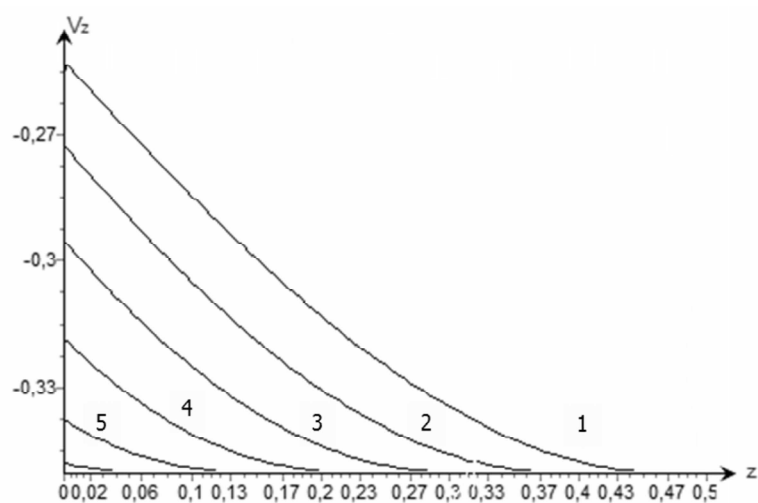


Рис. 3: Распределение усредненной скорости $\bar{V}_z = \bar{V}_z(z, t)$ в камере; условия на рис.2

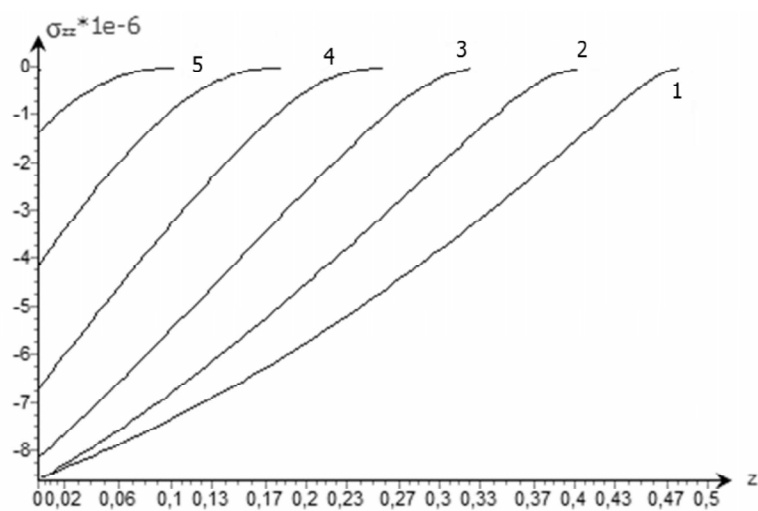


Рис. 4: Распределение усредненной осевой компоненты напряжения $\sigma_{zz} = \sigma_{zz}(z, t)$ в камере; условия на рис.2

Литература

1. **Беляева Н. А.** Математические модели деформируемых структурированных материалов. Монография. — Сыктывкар: Издательство СыктГУ, 2008. — 116 с.

2. **Беляева Н. А.** Влияние характерных времен на режимы твердофазной экструзии // *Вестн. Сыктывкарского ун-та. Сер. 1. Вып. 9. 2009. С. 46-53.*
3. **Беляева Н. А., Спиридонов А. В.** Уравнение движения в одномерной модели экструзии // *Вестн. Сыктывкарского ун-та. Сер. 1. Вып. 10. 2009. С. 91-96.*
4. **Беляева Н. А.** Влияние характерных времен на режимы твердофазной экструзии // *Вестн. Сыктывкарского ун-та. Сер. 1. Вып. 9. 2009. С. 46-53.*
5. **Беляева Н. А., Прянишникова Е. А.** Структурирование в неизотермической модели экструзии композитного материала // *Вестн. Сыктывкарского ун-та. Сер. 1. Вып. 12. 2010. С. 97-108.*
6. **Беляева Н. А., Прянишникова Е. А.** Математическое моделирование в задачах экструзии // *Вестн. Сыктывкарского ун-та. Сер. 1. Вып. 15. — 2012. — С. 31-44.*
7. **Беляева Н. А., Прянишникова Е. А.** Структурная математическая модель экструзии пористого вязкоупругого композитного материала на основе обобщенной модели Максвелла с учетом влияния звуковой волны. - Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам РФ, Реестр программ для ЭВМ. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2011660240. — 29 февраля 2012 г.
8. **Худяев С. И.** Пороговые явления в нелинейных уравнениях. Монография. — М: Физматлит, 2003. — 272 с.

Summary

Belyaeva N. A., Pryanishnikova E. A. The averaging method in the problem of mathematical modeling of composite extrusion

The solution of the problem of compressible composite extrusion to material of a cylindrical chamber in the guide under the gauge plunger press through a matrix using the method of averaging.

Keywords: extrusion, compressible composite, rheological equations, the method of averaging.

Сыктывкарский государственный университет

Поступила 20.12.2012