*Вестник Сыктывкарского университета.*
*Сер.1. Вып.16.2012*

**УДК 51-72 : 539.3**

# ПОЛВЕКА С МЕХАНИКОЙ ОБОЛОЧЕК
## (часть вторая – нелинейная теория)

***Е. И. Михайловский***

Первая часть статьи (см. “Вестник Сыктывкарского университета”, вып. 15 за 2012 год, стр. 8–30) была посвящена воспоминаниям автора, связанным с его работой в области линейной кирхгофовской теории оболочек. Во второй части дано описание полученных им результатов в нелинейной механике оболочек. Это согласуется с тем, что данный сборник посвящен 25–летию кафедры математического моделирования и кибернетики, в стенах которой и получены представленные ниже результаты.
*Ключевые слова:* оболочка, нелинейная теория, поперечные сдвиги, поперечное обжатие.

**4. Предисловие.** Специалистов в области оболочек не смущает то обстоятельство, что допущения Кирхгофа, которые практически никогда не выполняются, называют гипотезами:

1, a. нормаль к срединной поверхности исходной конфигурации переходит в нормаль к деформированной поверхности;

1, b. толщина оболочки при деформировании не меняется;

2. напряжения на площадках, параллельных срединной поверхности, пренебрежимо малы по сравнению с напряжениями в нормальных сечениях.

Теория оболочек потому и называется теорией, что она основывается на (так называемых) гипотезах Кирхгофа. Если же удается построить соответствующую математическую модель, игнорируя названные гипотезы, то ее правильнее называть *механикой оболочек.*

Основные результаты автора в этой области механики связаны с разработкой нелинейных моделей жесткогибких оболочек [1-10] и методов решения конструктивно–нелинейных задач [11-21], т.е. задач, обладающих существенной (неустранимой) нелинейностью, связанной с особенностями конструкции, а именно с наличием односторонних ограничений.

❑ Под *жесткогибкой оболочкой* [1] (в данной части статьи используется автономный список литературы) автор понимает оболочку, изготовленную из жесткого сжимаемого материала (например, из стали) и допускающую конечные (относительно большие) перемещения за счет конечных углов поворота при малых (по сравнению с единицей) деформациях. Традиционно такие оболочки называют *гибкими*. Для построения нелинейного закона упругости для жесткогибких оболочек предпочтительно использовать теоретический *стандартный материал 2-го порядка* (подробнее см. ниже).

Соответственно под *мягкогибкой* [8] будем понимать оболочку, изготовленную из мягкого несжимаемого материала (например, из резины) и допускающую конечные перемещения как за счет конечных углов поворота, так и за счет конечных деформаций. При построении законов упругости для мягкогибких оболочек чаще всего используют *неогуковский материал* (см., например, [8]). ■

Первые публикации по обозначенным выше направлениям исследований были сделаны на III Всесоюзной конференции по нелинейной теории упругости [22, 23], инициированной и организованной в значительной мере стараниями автора (Сыктывкар, 12–14 сентября 1989 года). Следует отметить, что направление, связанное с решением конструктивно–нелинейных задач, было общим для кафедры ММиК. В результате появилась оценка этой работы [24]: "Значительное внимание уделено новому разделу механики оболочек — конструктивно–нелинейным задачам. Интересные результаты здесь получены Е.И. Михайловским и его учениками. Ими разработаны эффективные методы решения контактных задач со свободной границей [11–14] и задач на устойчивость тонкостенных конструкций с односторонними связями [25–27]". (Ссылки приведены в соответствии с нумераией публикаций, принятой в данной статье).

## 5. Нелинейные уравнения статики жесткогибких оболочек

Пионерной для школы механики академика В.В. Новожилова нелинейной теорией оболочек является *квазикирхгофовская* теория К.Ф. Черныха [28]. Эта теория названа автором данной статьи "квазикирхгофовской" из-за того, что в ней учитываются все гипотезы Кирхгофа, кроме допущения о неизменности толщины (т.н. *поперечного обжатия*). Дело в том, что теория, предложенная в работе [28], изначально предназначалась для расчета оболочек из резиноподобных материалов, для которых поперечное обжатие может быть существенным. Однако она построена как общая теория оболочек из сжимаемых и несжимаемых материалов, так как определяющие уравнения выражаются через упругий потенциал с использованием разложения его производных в ряды по трансверсальной координате ($\xi$). Выбирая, например, упругий потенциал неогуковского материала (NHM) можно получить систему статики (динамики) мягкогибких оболочек. Для вывода уравнений жесткогибких оболочек рекомендуется использовать, как уже говорилось, упругий потенциал стандартного материала 2-го порядка (STM–2).

□ Сделаем некоторое пояснение. Автором введено понятие *девиатора n-го уровня* симметричного тензора 2-го ранга $\mathbf{A}$, под которым (девиатором) предлагается понимать тензор

$$\mathbf{A}_n = -(2/3)^n a_\gamma^{(n)} \mathbf{e}_\gamma \otimes \mathbf{e}_\gamma,$$

где

$$a_i^{(n)} = 1/2(a_j^{(n)} - a_k^{(n)}), i, j, k \overset{cycle}{=} 1, 2, 3;$$

$a_i^{(1)} = 1/2(a_j - a_k), a_1, a_2, a_3$ — главные значения тензора $\mathbf{A}$; $\otimes$ — знак тензорного произведения.

При этом девиатор первого уровня совпадает с "тензором сдвига" по В.М. Малькову [29], а девиатор второго уровня является "девиатором" по установившейся терминологии.

В работе [8] показано, что STM–2 — материал, для которого девиаторы тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа ($\mathring{\mathbf{\Pi}}$) и тензора деформаций Грина–Лагранжа ($\mathring{\mathbf{\Gamma}}$) подобны, т.е.

$$\mathring{\mathbf{\Pi}}_i = 2\mu \mathring{\mathbf{\Gamma}}_i, i = 1, 2.$$

Закон упругости для STM–2 формально имеет вид такой же, как и закон Гука [8]:

$$\mathring{\mathbf{\Pi}} = 2\mu \mathring{\mathbf{\Gamma}} + \lambda I_{\mathring{\Gamma}} \mathbf{1}, \tag{5.1}$$

где

$$\mu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{II_{\mathring{\Pi}_i}}{II_{\mathring{\Gamma}_i}}}, \lambda = \frac{1}{3}\Big(\frac{I_{\mathring{\Pi}_i}}{I_{\mathring{\Gamma}_i}} - 2\mu\Big).$$

(Напомним, что закон Гука выражается формулой

$$\mathbf{\Sigma} = 2\mu \mathbf{E} + \lambda I_E \mathbf{1}, \tag{5.2}$$

где $\mathbf{\Sigma}$ — тензор истинных напряжений Коши; $\mathbf{E}, I_E$ — тензор малых деформаций Коши и его первый главный инвариант.)

Иногда, вследствие схожести равенств (5.1) и (5.2), закон упругости для STM–2 называют законом Гука [30, 31]. ■

В квазикирхгофовской теории делалось предположение, что радиус–вектор материальной точки исходной конфигурации оболочки

$$\mathring{\mathbf{R}}(\alpha,\xi) = \mathring{\mathbf{r}}(\alpha) + \xi\mathring{\mathbf{n}}(\alpha),\ \ \alpha = (\alpha^1,\alpha^2) \tag{5.3}$$

в результате деформации последней принимает вид (“C” — Chernykh)

$$\overset{C}{\mathbf{R}}(\alpha,\xi) = \mathbf{r}(\alpha) + \lambda_\xi(\xi + {}^1\!/_2\xi^2 æ_\xi(\alpha))\mathbf{n}(\alpha), \tag{5.4}$$

где

$$\mathbf{r}(\alpha) = \mathring{\mathbf{r}}(\alpha) + \mathbf{u}(\alpha),\ \ \mathbf{u}(\alpha) = u_\beta\mathring{\mathbf{r}}^\beta + w\mathring{\mathbf{n}}. \tag{5.4$'$}$$

На основе аппроксимации (5.4) имеем

$$\overset{C}{\mathbf{R}}(\alpha, {}^1\!/_2\mathring{h}) - \overset{C}{\mathbf{R}}(\alpha, -{}^1\!/_2\mathring{h}) = \lambda_\xi\mathring{h}\mathbf{n}. \tag{5.5}$$

С другой стороны, в соответствии с рис. 5 можно записать

$$\overset{C}{\mathbf{R}}(\alpha, {}^1\!/_2\mathring{h}) - \overset{C}{\mathbf{R}}(\alpha, -{}^1\!/_2\mathring{h}) = h\mathbf{n}. \tag{5.6}$$

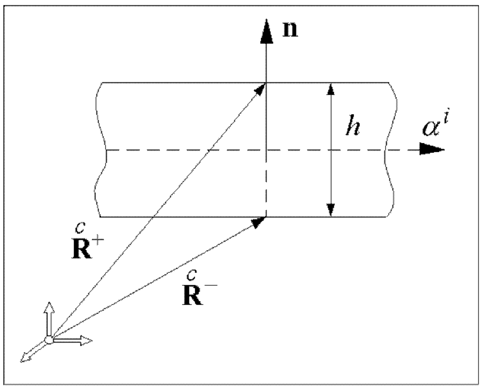


Рис. 5

Сравнивая соотношения (5.5) и (5.6), убеждаемся в том, что

$$\lambda_\xi = h/\mathring{h}, \tag{5.7}$$

т.е. $\lambda_\xi$ является кратностью изменения толщины оболочки в результате ее деформации. Нетрудно сообразить, что параметр $æ_\xi$ характеризует неравномерность поперечного обжатия по толщине оболочки.

Принципиальное отличие параметров $\lambda_\xi$, $\text{æ}_\xi$ от компонент вектора перемещения $u_1$, $u_2$, $w$ заключается в том, что последние имеют независимые вариации, через которые могут быть выражены вариации параметров поперечного обжатия, т.е.

$$\delta\lambda_\xi = f_1(\delta u_1, \delta u_2, \delta w), \quad \delta\text{æ}_\xi = f_2(\delta u_1, \delta u_2, \delta w).$$

Это связано с тем, что при вариационном выводе уравнений равновесия (движения) параметры $\lambda_\xi$, $\text{æ}_\xi$ определяются из некоторых дополнительных условий (различных для сжимаемых и несжимаемых материалов) и тем самым не влияют на число и порядок уравнений.

Попытки уточнить теорию оболочек за счет отказа от геометрической гипотезы Кирхгофа предпринимались неоднократно разными авторами (см., например, упомянутые работы [30, 31]). При этом теории, основанные на учете поперечных сдвигов по модели С.П.Тимошенко [32], принято называть теориями оболочек типа Тимошенко (или типа Тимошенко–Рейсснера). Теории, учитывающие поперечное обжатие, будем называть теориями типа Нагди [33].

Большинство работ, в которых делаются попытки учесть трансверсальные деформации (т.е. отказаться от геометрической гипотезы Кирхгофа 1, а – 1, б), основаны на линейной аппроксимации перемещений по толщине оболочки:

$$u_i^\xi(\alpha, \xi) = u_i(\alpha) + \xi v_i(\alpha), \;\; w^\xi(\alpha, \xi) = w(\alpha) + \xi\lambda_\xi(\alpha). \tag{5.8}$$

При этом независимыми считаются все шесть вариаций:

$$\delta u_1, \; \delta u_2, \;\; \delta v_1, \; \delta v_2, \; \delta w, \; \delta\lambda_\xi, \tag{5.9}$$

т.е. даже в случае отсутствия независимых поперечных сдвигов

$$\delta v_i = \varphi_i(\delta u_1, \delta u_2, \delta w, \delta\lambda_\xi), \quad i = 1, 2$$

вариационный вывод уравнений равновесия приводит к дополнительному по сравнению с квазикирхгофовской теорией К.Ф. Черныха уравнению в виде равного нулю коэффициента при вариации $\delta\lambda_\xi$ и, значит, к повышению порядка системы уравнений.

В частности, на аппроксимации (5.8) основаны работы [30, 31]. При этом автор работы [31] в обзорной статье [34] обратил внимание на несостоятельность используемой им же линейной аппроксимации прогиба $w^\xi(\alpha, \xi)$ по толщине оболочки, так как в случае пренебрежимо малого поворота вокруг нормали ($\omega_n$) это приводит к неотрицательному изменению толщины ($\lambda_\xi \geq 0$, см. форм. (5.7)). Таким образом, на основе анализа уравнений механики оболочек, полученных в работе [31], ее автор пришел к выводу, что функция $w^\xi(\alpha, \xi)$ должна аппроксимироваться, как минимум, квадратичной параболой по трансверсальной координате $\xi$.

Для автора данной работы этот вывод очевидно следует из того, что при линейной аппроксимации функции прогиба по $\xi$ нельзя удовлетворить на лицевых поверхностях оболочки граничным условиям

$$J\sigma^{33}(1/2\mathring{h}) = q_n^+, \quad J\sigma^{33}(-1/2\mathring{h}) = q_n^-. \tag{5.10}$$

А именно из этих условий на основании квадратичной аппроксимации (5.4) с учетом соотношения упругости

$$J\sigma^{33} = \lambda\mathring{a}^{\alpha\beta}\gamma^\xi_{\alpha\beta} + (\lambda + 2\mu)\gamma^\xi_{33}$$

следуют формулы для параметров поперечного обжатия

$$\lambda_\xi^2 = 1 - \frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu}\mathring{a}^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta} + \frac{2m_n}{(\lambda + 2\mu)\mathring{h}},$$

$$\lambda_\xi^2 æ_\xi = -\frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu}\mathring{a}^{\alpha\beta}æ_{\alpha\beta} + \frac{q_n}{(\lambda + 2\mu)\mathring{h}},$$

(где $q_n = q_n^+ - q_n^-$, $m_n = 1/2(q_n^+ + q_n^-)\mathring{h}$)

и их вариаций

$$\delta\lambda_\xi = \frac{\nu}{1-\nu}\mathring{a}^{\alpha\beta}\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta,$$

$$\delta(\lambda_\xi æ_\xi) = -\frac{\nu}{1-\nu}\mathring{a}^{\alpha\beta}\delta æ_{\alpha\beta}. \tag{5.11}$$

(Дабы не уводить читателя от основной линии изложения, автор здесь и впредь не поясняет всю совокупность принятых обозначений, отсылая читателя к монографии [8].)

Еще одно важное замечание в адрес квазикирхгофовской теории. Линеаризируя уравнения этой теории для случая плоской пластины, придем к разрешающему уравнению Софи Жермен–Лагранжа

$$d_0\Delta^2 w = q_n,$$

хотя известно, что при учете поперечного обжатия должно получаться названное уравнение с дополнительным нагрузочным слагаемым вида $\alpha h_\lambda^2 \Delta q_n$, $\alpha \sim 1$,

$$h_\lambda^2 = \frac{\nu \mathring{h}^2}{8(1-\nu)} \tag{5.12$_1$}$$

(см., например, уравнение Э. Рейсснера в работе [35]

$$d_0 \Delta^2 w = q_n - (6/5 h_\psi^2 - 4/5 h_\lambda^2)\Delta q_n$$

без учета поперечных сдвигов $h_\psi^2 = 0$, где

$$h_\psi^2 = \frac{\mathring{h}^2}{6(1-\nu)}). \tag{5.12$_2$}$$

Отсутствие названного слагаемого связано с неучетом работы внешних сил на перемещениях, обусловленных поперечным обжатием, и является следствием вывода К.Ф. Черныхом уравнений статики из условий равновесия бесконечно малого элемента оболочки. В работе [2] показано, что учет вариаций $\delta\lambda_\xi$, $\delta æ_\xi$ снимает это противоречие.

Теперь об учете поперечных сдвигов по моделям С.П. Тимошенко и Д.И. Журавского в предложенной автором нелинейной теории оболочек. Очевидно, что для тонких жесткогибких оболочек поперечные сдвиги малы, и поэтому представляется естественным (во всяком случае, на первом этапе) учитывать их в линейном приближении. При этом основное допущение заключается в том. что радиус–вектор исходной конфигурации оболочки (5.3) в результате деформации последней трансформируется в вектор

$$\mathbf{R}(\alpha,\xi) = \overset{C}{\mathbf{R}}(\alpha,\xi) + \varphi(\xi)\psi_\beta(\alpha)\mathbf{r}^\beta(\alpha), \tag{5.13}$$

где

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} \xi & \text{— модель Тимошенко,} \\ \xi - \dfrac{4}{3\mathring{h}^2}\xi^3 & \text{— модель Журавского.} \end{cases} \tag{5.13$'$}$$

Кроме (5.13) используются допущения:

($\alpha$) оболочка является тонкой и остается таковой в процессе деформирования, т.е.

$$\xi \mathring{b}_{ij}/\sqrt{\mathring{a}_{ii}\mathring{a}_{jj}} << 1, \; \xi b_{ij}/\sqrt{a_{ii}a_{jj}} << 1$$

($\mathring{a}_{ij}, \mathring{b}_{ij}$ и $a_{ij}, b_{ij}$ — компоненты метрического тензора и тензора кривизны срединной поверхности до и после деформации);

($\beta$) тангенциальные компоненты тензора Грина–Лагранжа ($\gamma_{ij}, i, j = 1, 2$) изменяются по толщине пластины линейно;

($\gamma$) поперечные сдвиги учитываются по линейной теории;

($\delta$) локальной изменяемостью функции $\lambda_\xi(\alpha)$ можно пренебрегать.

С использованием представленных выше допущений на основе вариационного принципа Лагранжа получена система уравнений

$$\nabla_\alpha \widetilde{T}^{\alpha i} - b^i_\alpha \widetilde{T}^\alpha_{\cdot n} + q^i = 0,$$

$$\nabla_\alpha \widetilde{T}^\alpha_{\cdot n} + b_{\alpha\beta} \widetilde{T}^{\alpha\beta} + q_n = 0,$$

$$\nabla_\alpha \widetilde{M}^{\alpha i} - \widetilde{T}^i_{\cdot n} = 0, \;\; i = 1, 2, \tag{5.14}$$

где тильдами помечены следующие приведенные статические величины:

$$\widetilde{T}^{ij} = \mathcal{A}^{-1} T^{ij} + \frac{\nu}{1-\nu} \mathring{a}^{ij} m_n,$$

$$\widetilde{T}^i_{\cdot n} = \frac{\mathcal{A}^{-1}\mathring{h}}{2\varphi(\mathring{h}/2)k} T^i_{\cdot n} \approx \frac{1}{k} \mu \mathring{h} \mathring{a}^{i\beta} \psi_\beta,$$

$$\widetilde{M}^{ij} = \mathcal{A}^{-1} M^{ij} + \lambda_\xi h^2_\lambda \mathring{a}^{ij} q_n. \tag{5.14$'$}$$

При этом использованы обозначения

$$\mathcal{A} = \frac{dS}{d\mathring{S}}; \;\; \frac{1}{k} = \frac{1}{\mathring{h}/2} \int_{-\mathring{h}/2}^{\mathring{h}/2} \varphi'^2(\xi) d\xi = \begin{cases} 1 & \text{— модель Тимошенко,} \\ 8/15 & \text{— модель Журавского.} \end{cases}$$

Уравнения (5.14) при отсутствии тильд идентичны по форме записи уравнениям равновесия линейной теории оболочек (6.81) [36] и в этом смысле в работе [8] названы *каноническими*.

Тот факт, что уравнения нелинейной механики упругих оболочек, построенные без использования геометрической гипотезы Кирхгофа, удалось преобразовать к каноническому виду относительно приведенных статических величин (5.14$'$), позволяет сформулировать быстрый алгоритм уточнения различных кирхгофовских линейных или частично линеаризированных вариантов теории оболочек за счет учета трансверсальных деформаций (т.н. $\mathfrak{M}$–алгоритм).

$\mathfrak{M}$–алгоритм заключается:

• в замене статических величин соответствующего варианта кирхгофовской теории оболочек ($T^{ij}$, $M^{ij}$, $T^i_{.n}$) правыми частями формул (5.14$'$);

• в сохранении всех допущений рассматриваемого кирхгофовского варианта теории оболочек, связанных с выражением геометрических параметров деформированной срединной поверхности ($a_{ij}$, $b_{ij}$) через перемещения.

Несколько слов о граничных величинах. В работе [2] показано, что с позиции принципа Лагранжа нелинейная теория оболочек, вообще говоря, *не является корректной*, так как даже в кирхгофовском варианте имеется шесть независимых геометрических граничных величин

$$w, u_\nu, u_t, \frac{dw}{d\mathring{s}_\nu}, \frac{du_\nu}{d\mathring{s}_\nu}, \frac{du_t}{d\mathring{s}_\nu}, \tag{5.15}$$

что не согласуется с порядком системы полевых уравнений в перемещениях.

Этот вопрос "построители" нелинейных теорий обычно обходят молчанием. Так, например, в монографии [37] получено следующее выражение для работы напряжений, действующих на боковую поверхность оболочки, на вариациях отвечающих им перемещений (см. [37], форм. (11.107)):

$$\delta A = \oint_{\partial\mathring{\Omega}} [(T'_{\nu\nu} + T'_{\nu t}\mathbf{t} + T'_{\nu n}\mathbf{n}) \cdot \delta\mathbf{r} + \underline{M_{\nu\nu} \cdot \delta\mathbf{n}}] d\mathring{s}_t. \tag{5.16}$$

Интеграл от подчеркнутого в (5.16) слагаемого можно преобразовать так:

$$\oint_{\partial\mathring{\Omega}} M_{\nu\nu} \cdot \delta\mathbf{n} d\mathring{s}_t = \oint_{\partial\mathring{\Omega}} \lambda_\nu^{-1} M_{\nu\nu} \frac{d\mathbf{r}}{d\mathring{s}_\nu} \cdot \delta\mathbf{n} d\mathring{s}_t =$$

$$= -\oint_{\partial\mathring{\Omega}} \lambda_\nu^{-1} \mathbf{n} M_{\nu\nu} \cdot \delta\Big(\frac{d\mathbf{r}}{d\mathring{s}_\nu}\Big) d\mathring{s}_t. \tag{5.17}$$

В линейной теории $\cdot\delta\mathbf{n} \approx \delta\omega_\nu$ и поэтому геометрические граничные величины исчерпываются совокупностью $\{w, u_\nu, u_t, \omega_\nu\}$. В нелинейной теории, строго говоря, следует рассматривать 6 геометрических величин (5.15), что очевидно следует из последнего интеграла (5.17).

Если же пренебречь работой соответствующих обобщенных сил на вариациях $\delta(du_\nu/d\mathring{s}_\nu)$, $\delta(du_t/d\mathring{s}_\nu$ в функционале Лагранжа, то для рассматриваемой нелинейной теории оболочек граничные величины можно представить в виде таблицы [8]

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c|c} \widetilde{T}_{\nu\nu} & T_{\nu t} & \widetilde{Q}_{\nu n} & \widetilde{M}_{\nu\nu} & M_{\nu t} \\ \hline u_\nu & u_t & w & \omega_\nu & \omega_t \end{array}\right|. \tag{5.18}$$

## 6. Теория пологих оболочек типа Маргера–Тимошенко–Нагди

В работе [7] $\mathfrak{M}$–алгоритм иллюстрируется на примере уточнения теории пологих оболочек К. Маргера [38] за счет учета поперечных сдвигов и обжатия. Как известно (см., например, [39]), в названной теории кроме допущений, связанных с пологостью оболочки, следуя Т. Ка́рману [40], учитываются в формулах для тангенциальных компонент тензора Грина–Лагранжа квадратичные слагаемые относительно углов поворота касательных к координатным линиям срединной поверхности.

За исходные (подлежащие уточнению) в работе [7] приняты уравнения (1.21), (1.22), (1.24)–(1.26) [41], которые, будучи приведенными к принятым выше обозначениям, записываются в виде (статические величины помечены тильдами, чтобы не выписывать систему дважды; сделано предположение, что действует лишь нормальная нагрузка)

$$
\begin{gathered}
\widetilde{M}_{\alpha\beta,\beta\alpha} + (\kappa_{\alpha\beta} + w_{,\alpha\beta})\widetilde{T}_{\alpha\beta} + q_n = 0, \\
\widetilde{T}_{in} = \widetilde{M}_{i\alpha,\alpha},\ \widetilde{T}_{i\alpha,\alpha} = 0,\ i = 1, 2, \\
(f_{i,j} = \partial f_i / \partial x_j).
\end{gathered} \tag{6.1}
$$

Формулы (5.14′) в рамках принятых здесь геометрических допущений имеют вид

$$
\begin{gathered}
\widetilde{M}_{ij} = \overset{w}{M}_{ij} + \overset{\psi}{M}_{ij} + h_\lambda^2 q_n \delta_{ij}, \\
\widetilde{T}_{ij} = T_{ij} = \frac{\nu}{1-\nu} m_n \delta_{ij},\ \widetilde{T}_{in} = \frac{1}{k}\mu \mathring{h} \psi_i, \\
(\delta_{ij} \text{ — символ Кронекера})
\end{gathered} \tag{6.2}
$$

где

$$
\begin{gathered}
\overset{w}{M}_{11} = -d_0(w_{,11} + \nu w_{,22}),\ \overset{w}{M}_{22} = (1 \rightleftharpoons 2)\overset{w}{M}_{11}, \\
\overset{w}{M}_{12} = -(1-\nu) d_0 w_{,12}; \\
\overset{\psi}{M}_{11} = d_0(\psi_{1,1} + \nu\psi_{2,2}),\ \overset{\psi}{M}_{22} = (1 \rightleftharpoons 2)\overset{\psi}{M}_{11}, \\
\overset{\psi}{M}_{12} = {}^1\!/_2 (1-\nu) d_0(\psi_{1,2} + \psi_{2,1}).
\end{gathered} \tag{6.2′}
$$

Выполнив преобразования, аналогичные тем, что проводятся при выводе уравнений Ка́рмана и отбросив малые слагаемые, придем к следующей системе уравнений:

$$
d_0 \Delta^2 w = q_n - (k h_\psi^2 - h_\lambda^2)\Delta q_n + \Delta_B \Phi + \Lambda(\Phi, w),
$$

$$\frac{1}{E\mathring{h}}\Delta^2\Phi = \frac{\nu}{E\mathring{h}}\Delta m_n - \frac{1}{2}\Lambda(w,w) - \Delta_B w - \beta w,$$

$$\Delta\psi_i - \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}(\psi_{i,j} - \psi_{j,i}) - \frac{1}{kh_\psi^2}\psi_i = (\Delta w - \frac{h_\lambda^2}{d_0}q_n)_{,i}, \ i \neq j. \tag{6.3}$$

Здесь

$$\Lambda(\Phi, w) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2},$$

$$\Delta_B = \kappa_{22}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - 2\kappa_{12}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} + \kappa_{11}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2},$$

$$\beta = \kappa_{11,22} - 2\kappa_{12,12} + \kappa_{22,11},$$

$\Phi$ — функция напряжений (усилий), $\kappa_{ij}$ — кривизны срединной поверхности.

## 7. Полудеформационные граничные величины

Традиционный вариант граничных величин для теории пологих оболочек типа Маргера–Тимошенко–Нагди можно записать в виде таблиц [20]

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hat{T}_{\nu n} & \hat{M}_{\nu\nu} & M_{\nu t} \\ \hline w & \vartheta_\nu + \psi_\nu & \vartheta_t + \psi_t\end{array}; \tag{7.1$_1$}$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hat{T}_{\nu\nu} & T_{\nu t} \\ \hline u_\nu & u_t\end{array}. \tag{7.1$_2$}$$

При этом все силовые граничные величины без интегрирования выражаются через основные искомые функции $w, \Phi, \psi_1, \psi_2$ (см. уравнения (6.3)). Что же касается геометрических граничных величин, то здесь возникает проблема с формулировкой краевых условий в терминах тангенциальных смещений $u_\nu, u_t$, так как последние не выражаются через основные искомые функции без интегрирования. А именно, для их нахождения необходимо дополнительно интегрировать систему уравнений [20]

$$u_{1,1} = \frac{1}{E\mathring{h}}(\Phi_{,22} - \nu\Phi_{,11}) + \kappa_{11}w - \frac{1}{2}w_{,1}^2 - \frac{\nu}{E\mathring{h}}m_n, \ u_{2,2} = (1 \rightleftharpoons 2)u_{1,1},$$

$$u_{1,2} + u_{2,1} = -\frac{2(1+\nu)}{E\mathring{h}}\Phi_{,12} + 2\kappa_{12}w - w_{,1}w_{,2}. \tag{7.2}$$

На это обстоятельство автор впервые обратил внимание в работе [42] при выводе уравнений теории плоских пластин типа Ка́рмана–Тимошенко. Там же был предложен т.н. *полудеформационный вариант* *граничных величин*, при использовании которого система уравнений названной теории становится замкнутой.

Несколько позже [10] полудеформационные граничные величины (ПДГВ) были распространены на теорию пологих оболочек типа Маргера–Тимошенко–Нагди. ПДГВ в окончательном виде сводятся к замене таблицы $(7.1)_2$ на следующую:

$$\left|\begin{array}{c|c} F_t^* & B_n^* \\ \hline -\varepsilon_{tt}^* & æ_{tn}^* \end{array}\right|. \tag{$(7.1)_3$}$$

где

$$F_t^* = -\frac{d\Phi}{d\mathring{s}_\nu},\ B_n^* = \Phi,\ -\varepsilon_{tt}^* = g_1(\Phi, w),\ æ_{tn}^* = g_2(\Phi, w).$$

Термин "полудеформационные" граничные величины связан с тем, что деформационными являются лишь тангенциальные величины, т.е. при отсутствии поперечных сдвигов — ровно половина полного варианта этих величин (см. "Основные обозначения" в первой части этой статьи).

## 8. О влиянии учета поперечных сдвигов на напряженное состояние оболочки

Влияние учета поперечных деформаций на напряженное состояние оболочки впервые было выявлено в работе [43] на примере контакной задачи для замкнутой цилиндрической оболочки, подкрепленной свободно надетым кольцом жесткости (т.н. контактная задача со свободной границей). Полученный качественный результат проверялся на более простой задаче, не перегруженной учетом побочных факторов [44]. В этом случае рассматривалась прямоугольная в плане открытая цилиндрическая оболочка (цилиндрическая пластина) под действием нормальной нагрузки, равномерно распределенной по площадке с областью, подобной области срединной поверхности цилиндрической пластины. Задача решалась с использованием двойных тригонометрических рядов.

Показано, что при нагрузках, близких к сосредоточенным, графики изгибающих моментов от изменения кривизны срединной поверхности и от тангенциального изменения поперечных сдвигов находятся в противофазах в области максимальных абсолютных значений тех и других моментов (рис. 6). В этом и заключается механизм релаксации напряжений за счет учета поперечных сдвигов.

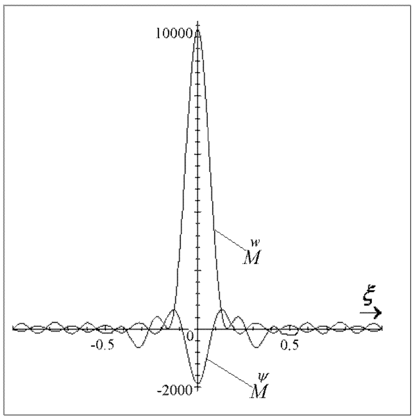


Рис. 6

(На рис. 6 показан один из графиков рис. П5.3 монографии [8].)

При этом относительное снижение моментов может многократно превышать оценку погрешности гипотез Кирхгофа, данную в работе [45]. Иными словами, критерий Новожилова–Финкельштейна (оценивавших погрешность, вносимую в уравнения геометрической гипотезой Кирхгофа, как величину порядка $h/R$ по сравнению с единицей) перестает "работать" при нагрузках, близких к сосредоточенным. К этому же выводу пришел в свое время А.Л. Гольденвейзер при асимптотическом построении двумерной теории оболочек [46]: оценка, данная в работе [45], является справедливой для напряженно–деформаированного состояния с не слишком большой изменяемостью...

Так автор видит основные результаты, полученные им в нелинейной механике оболочек. "За скобками" остались методы и задачи конструктивно–нелинейной механики, с которыми можно ознакомиться по монографиям [20, 21].

# Литература

1. **Михайловский Е. И.** Граничные условия подкрепленного края жесткогибкой оболочки в нелинейной теории типа Тимошенко–Рейсснера // *Изв. РАН. МТТ. 1995. №2. С. 109-119.*

2. **Михайловский Е. И.** Игнорирование гипотез Кирхгофа в нелинейной теории жесткогибких оболочек // Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела / Тр. научной школы акад. В.В. Новожилова. СПб.: СПбГУ, 2000. Вып. 2. С. 131–160.

3. **Михайловский Е. И., Черных К. Ф.** Актуальные задачи нелинейной механики тонких упругих оболочек // Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела / Тр. научной школы акад. В.В. Новожилова. СПб.: СПбГУ, 1998. Вып. 1. С. 234–255.

4. Общая нелинейная теория упругих оболочек / Авт.: *С.А. Кабриц, Е.И. Михайловский, П.Е. Товстик, К.Ф. Черных, В.А. Шамина.* СПб: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2002, 388 с.

5. **Михайловский Е. И., Черных К. Ф.** Развитие механики оболочек в трудах школы академика В.В. Новожилова // *Успехи механики. 2003. Т.2, №3. С. 87–126.*

6. **Михайловский Е. И.** Школа механики оболочек академика Новожилова. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского ун-та, 2005. 172 с.

7. **Михайловский Е. И.** Нелинейная теория жесткогибких оболочек типа Журавского // *Вестн. Сыктывкарского ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. Инф. 2007. Вып. 7. С. 77–100.*

8. **Михайловский Е. И.** Математические модели механики упругих тел. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского ун-та, 2007. 516 с.

9. **Mikhailovskii E. I., Yermolenko A. V.** On Nonlinear Theory of Rigid-Flexible Shells without the Kirchoff Hypotheses // Critical Review of the Theories of Plates and Shells and New Application. Berlin: Springer, 2004. P. 157–164.

10. **Михайловский Е. И., Ермоленко А. В.** Полудеформационный вариант граничных условий в нелинейной теории пологих оболочек // Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела / Тр. научной школы акад. В.В. Новожилова. СПб.: СПбГУ, 2000. Вып. 2. С. 60–76.

11. **Михайловский Е. И., Тарасов В. Н.** Контактные задачи для гибких элементов конструкций // *Проблемы нелинейной теории упругости. Калинин: Изд-во Калинин. полит. ин-та, 1989. С. 100–108.*

12. **Михайловский Е. И., Тарасов В. Н.** Задача со свободной границей для оболочки, подкрепленной ребрами одностороннего действия // В.В. Новожилов — ученый, педагог, гражданин. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1990. С. 121–128.

13. **Михайловский Е. И., Тарасов В. Н.** Метод решения контактных задач с неизвестной областью взаимодействия // Новожиловский сб. (сб. трудов, посвященный 80–летию акад. В.В. Новожилова). СПб.: Судостроение, 1992. С. 17–26.

14. **Михайловский Е. И., Тарасов В. Н.** О сходимости метода обобщенной реакции в контактных задачах со свободной границей // *РАН. ПММ. 1993. Т.57, вып. 1. С. 122–136.*

15. **Михайловский Е. И., Тарасов В. Н.** Локальный метод поиска собственных чисел положительно однородного оператора: тез. докл. // *Международная научн. конф., посвящ. 100–летию со дня рождения Н.Г. Чеботарева. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1994. С. 88.*

16. **Михайловский Е. И., Тулубенская Е. В.** Алгоритм локального перебора вариантов в задаче об устойчивости круглой пластины на границе винклеровых сред // *Механика и процессы управления: Тр. XXXVI Уральского семинара, посвященного 150–летию К.Э. Циолковского, 100–летию С.П. Королева и 60–летию Государственного ракетного центра “КБ им. академика В.П. Макеева”. Екатеринбург: УрО РАН, 2007. С. 109–116.*

17. **Михайловский Е. И., Тулубенская Е. В.** Алгоритм локального перебора вариантов в одной существенно нелинейной спектральной задаче // *РАН. ПММ. 2010. Т. 14, вып. 2. С. 299–310.*

18. **Михайловский Е. И., Тулубенская Е. В.** Алгоритм движения по параметру жесткости в проблеме устойчивости на границе винклеровых сред // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. №3 (24). С. 62–71.*

19. **Михайловский Е. И.** Устойчивость и закритическое поведение упругих систем при односторонних ограничениях на перемещения. Сыктывкар: Коми научный центр УрО РАН, 2004. С. 32–57.

20. **Михайловский Е. И.** Элементы конструктивно–нелинейной механики. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского ун-та, 2011. 212 с.

21. **Михайловский Е. И., Тулубенская Е. В.** Упругие конструкции с односторонними связями (элементы теории и задачи). Palmarium Academic Publishing. 2012. 120 с.

22. **Корелин Н. А., Михайловский Е. И.** Деформационная теория ребристых оболочек (нелинейный случай) // *Тезисы докл. III Всесоюзн. конф. по нелинейной теории упругости. Сыктывкар: Сыктывкарский ун-т, 1989. С. 23–25.*

23. **Михайловский Е. И., Тарасов В. Н.** Метод обобщенной реакции в задаче с неизвестной границей контакта // *Тезисы докл. III Всесоюзн. конф. по нелинейной теории упругости. Сыктывкар: Сыктывкарский ун-т, 1989. С. 80–81.*

24. **Черных К. Ф. и др.** Валентин Валентинович Новожилов и его научная школа / Авт.: Ю.М. Даль, В.И. Зубов, Ю.И. Кадашевич, Е.И. Михайловский, Н.Ф. Морозов, В.Я. Павилайнен, В.А. Павловский, Л.И. Слепян, Н. С. Соломенко, К.Ф. Черных, В.А. Шамина. СПб.: НИИ химии СПбГУ, 1998. 160 с.

25. **Тарасов В. Н.** Задачи на собственные значения для положительно однородных операторов // *Вестн. Сыктывкарского ун-та. Сер. 1: Мат., Мех., Инф. 1995. Вып. 1. С. 192–204.*

26. **Холмогоров Д. В.** Устойчивость стержня на границе двух упругих сред // *Вестн. Сыктывкарского ун-та. Сер. 1: Мат., Мех., Инф. 1995. Вып. 1. С. 205–216.*

27. **Холопов А. А.** Минимальные формы потери устойчивости стержня на границе жесткой и упругой сред // *Вестн. Сыктывкарского ун-та. Сер. 1: Мат., Мех., Инф. 1995. Вып. 1. С. 217–233.*

28. **Черных К. Ф.** Нелинейная теория изотропно–упругих тонких оболочек // *Изв. АН СССР. МТТ. 1980. №2. С. 148-159.*

29. **Мальков В. М.** Математическое моделирование в теории упругости. СПб.: СПбГУ, 1997. 205 с.

30. **Айнола Л. Я.** Нелинейная теория типа Тимошенко для упругих оболочек // *Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1965. Т. 14, №3. С. 337–344.*

31. **Галимов К. З.** Нелинейная теория тонких оболочек типа Тимошенко // *Исслед. по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1975. Вып. 11. С. 97–112.*

32. **Timoshenko S. P.** On the correction for shear of the diffential equation for transverse vibrations of prismatic bars // *Philosophical Magazine and Journal of Science, ser. 6. 1921. Vol. 41, №245. P. 744–746.*

33. **Naghdi P. M.** On the theory of thin elastic shell // *Quart. Appl. Math. 1957.* **14**. *P.369–380.*

34. **Галимов К. З.** О некоторых направлениях развития механики деформированного тела в Казани // Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1976. Вып. 12. С. 3–26.

35. **Тимошенко С. П., Войнович–Кригер С.** Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 636 с.

36. **Новожилов В. В., Черных К. Ф., Михайловский Е. И.** Линейная теория тонких оболочек. Л.: Политехника, 1991. 656 с.

37. **Черных К. Ф.** Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.

38. **Marguerre K.** Zur theorie der gekrümmten Platte grosser Form*rm̈*anderung // *Jahrbuch 1939 deutscher Luftfahrtforschung. Bd. 1. Berlin: Adlershof* Bü*cherei. 1939. S. 413–418.*

39. **Филин А. П.** Элементы теории оболочек. Л.: Стройиздат, 1987. 384 с.

40. **Kármán T.** Festigkeitsprobleme in Maschinenbau // Encyclopedie der Mathematischen Wissenschaften. 1910. Bd. 2, №2. S. 311-385.

41. **Вольмир А. С.** Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.

42. **Mikhailovskii E. I.** On formulating boundary conditions in the Kármán plane plate bending theory // *Transactions of St-Petersburg academy of sciences for strength problems (to the sixtieth birthday of E.I. Mikhailovskii — fellow of the SPASP). Syktyvkar state university. 1997. Vol. 1. P. 21–44.*

43. **Миронов В. В., Михайловский Е. И.** Об оценке влияния поперечных деформаций в одной контактной задаче со свободной границей // *Изв. РАН. МТТ. 2008. №5. С. 52–67.*

44. **Миронов В. В., Михайловский Е. И.** О влиянии поперечных сдвигов на напряженное состояние цилиндрических оболочек при локальных воздействиях // *Тр. XXV Российской школы и XXXV Уральского семинара, посвященных 60–летию Победы. Ч. 1. / Наука и технологии. М.: Изд-во РАН, 2005. С. 231–239.*

45. **Новожилов В. В., Финкельштейн Р. М.** О погрешности гипотез Кирхгофа в теории оболочек // *АН СССР. ПММ. 1943. Т. VI, вып. 5. С. 331-340.*

46. **Гольденвейзер А. Л.** Алгоритм асимптотического построения двухмерной теории тонких оболочек и принцип Сен–Венана // *РАН. ПММ. 1994. Т. 58, вып. 6. С. 96–108.*

**Summary**

**Mikhailovskii E. I.** The half century with the mechanics of shells (Part II – the nonlinear theory)

The first part of the article was devoted to memories of the author related to his work in the field of the linear Kirchhoff shell theory. In the second part the description of the recieved results in the nonlinear mechanics of shells is given. This is consistent with the fact that this journal is devoted to 25–anniversary of the department of mathematical modeling and cybernetics, in the walls of which were obtained the described results.

*Keywords: shell, nonlinear theory, transversal shear, transverse compression.*

*Сыктывкарский государственный университет* *Поступила 12.12.2012*