Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.16.2012

УДК 512.556

ПИРСОВСКИЕ ЦЕПИ ПОЛУКОЛЕЦ

Р. В. Марков, В. В. Чермных

В статье вводится понятие пирсовской цепи конгруэнций полуколец — аналог пирсовской цепи идеалов колец. Приводятся основные свойства и некоторые приложения этой конструкции: характеризация абелевых, заменяемых справа полуколец, правых полуколец Безу.

Ключевые слова: полукольцо, пирсовский пучок, пирсовский слой, пирсовская цепь, функциональное представление полукольца, характеризация полуколец.

В фундаментальной работе Пирса [8] построена конструкция пучка колец, названного впоследствии пирсовским пучком, и доказана изоморфность представления произвольного кольца с единицей сечениями этого пучка. В дальнейшем появилась серия работ, в которых пирсовский пучок применялся для изучения различных классов колец. Беджесом и Стефенсоном [5] [6] [7] введено полезное понятие пирсовской цепи идеалов кольца. Идея этой конструкции следующая: центральным идемпотентам кольца при пирсовском представлении соответствуют глобальные сечения, принимающие в каждом слой либо ноль, либо единицу. Однако, в слоях могут быть нетривиальные наборы центральных идемпотентов, и следовательно, возможно содержательное пирсовское представление слоев. Эта процедура "построения пирсовских слоев для ранее построенных пирсовских слоев" и приводит к пирсовской цепи идеалов. Авторами даются некоторые приложения конструкции. На русском языке элементы теория пирсовских цепей представлены в монографии А.А.Туганбаева [2].

Конструкция пирсовского пучка была перенесена и на некоторые другие алгебраические объекты — ограниченные дистрибутивные решетки, почти-кольца, полукольца. Так, для полуколец, являющихся основными объектами настоящей статьи, пирсовское представление появилось в [3].

Основной целью данной работы является определение пирсовской цепи конгруэнций полукольца. Также получены результаты, описывающие некоторые полукольца в терминах пирсовских слоев и пирсовских цепей конгруэнций.

С терминологией и основными методами теории пучковых представлений можно познакомиться в монографиях Е.М.Вечтомова [1] и В.В.Чермных [4].

1. Основные определения

Определение 1.1. *Непустое множество S с бинарными операциями $+$ и $\cdot$ называется* ***полукольцом****, если выполняются следующие аксиомы:*

1. *$(S,+)$ — коммутативная полугруппа с нейтральным элементом 0;*
2. *$(S,\cdot)$ — полугруппа с нейтральным элементом 1;*
3. *Умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон;*
4. *$0a = 0 = a0$ для любого $a \in S$.*

Определение 1.2. *Мультипликативный идемпотент e полукольца S называется* ***центральным дополняемым идемпотентом****, если:*

1. *e — центральный: $(\forall x \in S)(ex = xe)$;*
2. *e — дополняемый: $(\exists e^{\perp} \in S)(e + e^{\perp} = 1 \wedge ee^{\perp} = 0)$.*

Легко видеть, что дополнение $e^{\perp}$ к центральному дополняемому идемпотенту e является центральным дополняемым идемпотентом и задается однозначно.

В дальнейшем, если специально не оговорено, будем называть центральные дополняемые идемпотенты **дополняемыми идемпотентами.**

Обозначим через BS множество всех дополняемых идемпотентов. Множество $(BS,\oplus,\cdot)$ с введенной операцией сложения $e\oplus f = ef^{\perp}+e^{\perp}f$ и полукольцевым умножением образует булево кольцо.

Пусть $MaxBS$ — множество всех максимальных идеалов булева кольца BS. Напомним, что топология Стоуна–Зарисского вводится на этом множестве, если определить открытые множества как $D(A) =$

$\{M \in MaxBS : A \nsubseteq M\}$ для любого идеала A кольца BS. Для произвольного дополняемого идемпотента $e \in BS$ обозначим $D(e) = D(eBS) = \{M \in MaxBS : e \notin M\}$.

Известно (см., например, [4]), что $MaxBS$ является нульмерным компактом с базисом открытых множеств вида $D(e)$.

Определение 1.3. *Пространство $MaxBS$ всех максимальных идеалов булева кольца BS называется* ***пирсовским спектром*** *полукольца S.*

Определение 1.4. *Идеал A полукольца S назовем* ***регулярным****, если он порожден некоторым множеством дополняемых идемпотентов.*

Определение 1.5. *Пусть A — регулярный идеал. Введем отношение θ_A на полукольце S такое, что*

$$a \equiv b(\theta_A) \Leftrightarrow ae^{\perp} = be^{\perp}$$

для некоторого дополняемого идемпотента $e \in A$.

Стандартно проверяется, что θ_A является конгруэнцией.

Определение 1.6. *Конгруэнцию θ_A по регулярному идеалу A назовем A-**регулярной**. Если идеал A порождается некоторым $M \in MaxBS$, то A-регулярную конгруэнцию θ_A назовем* ***конгруэнцией Пирса*** *и обозначим δ_M.*

Определение 1.7. *Семейство конгруэнций $(\sim_x)$ на полукольце S, индексированное точками x топологического пространства X, называется открытым семейством, если для любых $a, b \in S$ множество $V(a,b) = \{x \in X : a \equiv b(\sim_x)\}$ открыто в X.*

Предложение 1.1. [4] *Семейство всех конгруэнций Пирса на полукольце S, индексированное точками M топологического пространства $MaxBS$, образует открытое семейство.*

Определение 1.8. *Тройка $(\boldsymbol{P}, \pi, \boldsymbol{X})$ называется* ***пучком полуколец****, если выполняются следующие условия:*

1. *X и P — топологические пространства;*
2. *$\pi : P \to X$ — локальный гомеоморфизм;*
3. *Для каждой точки $x \in X$ множество $P_x = \pi^{-1}(x)$ является полукольцом;*

4. *Полукольцевые операции непрерывны;*

5. *Отображения* $\widehat{0}$ *и* $\widehat{1}$*, ставящие каждой точке* $x \in X$ *соответственно ноль* 0_x *и единицу* 1_x *полукольца* P_x*, непрерывны.*

Пространства X и P называются **базисным** и **накрывающим** соответственно; P_x называется **слоем пучка**. Непрерывные функции из X в P, для которых каждая точка базисного пространства отображается в соответствующий слой пучка, носят название **глобальных сечений** пучка P. Непосредственно из определения следует, что множество всех глобальных сечений пучка полуколец с поточечно определенными операциями является полукольцом — **полукольцом глобальных сечений**.

Предложение 1.2. [4] *Пусть* S *— полукольцо,* X *— топологическое пространство. Тогда эквивалентны следующие условия:*

1. $(\sim_x), x \in X$ *— открытое семейство конгруэнций на* S*;*

2. $(\boldsymbol{P},\boldsymbol{X})$ *— пучок полуколец, где* $\boldsymbol{P} = \dot\cup\{S/\sim_x : x \in X\}$.

Из предложений 1.1 и 1.2 следует, что дизъюнктное объединение $\mathbf{P}(S) = \dot\cup\{S/\delta_M : M \in MaxBS\}$ над топологическим пространством $MaxBS$ является пучком полуколец, называемым **пирсовским пучком полуколец**.

Для каждого $M \in MaxBS$ полукольцо S/δ_M называется **пирсовским слоем** пучка $P(S)$ в точке M.

Пусть a — произвольный элемент полукольца S. Стандартно проверяется, что глобальным сечением пучка $P(S)$ над $MaxBS$ является отображение $\widehat{a} : MaxBS \to P(S)$, заданное равенством $\widehat{a}(M) = \overline{a}_M$ для каждого $M \in MaxBS$. (Здесь $\overline{a}_M$ — класс элемента a в факторполукольце S/δ_M.)

Определение 1.9. ***Функциональным (пучковым) представлением*** *полукольца* S *называется полукольцевой гомоморфизм* $\alpha : S \to \Gamma(P(S), X)$ *полукольца* S *в полукольцо всех глобальных сечений пучка* $P(S)$ *над топологическим пространством* X*. Представление* α *называется* ***точным, полным*** *или* ***изоморфным****, если* α *— соответственно мономорфизм, эпиморфизм или изоморфизм.*

Теорема 1. [3] [4] *Для любого полукольца* S *функциональное представление* $\alpha : S \to \Gamma(P(S), MaxBS), \alpha(a) = \widehat{a}$ *является изоморфизмом между* S *и полукольцом всех глобальных сечений его пирсовского пучка.*

Предложение 1.3. *Для полукольца S равносильны условия:*

1. *Каждый идемпотент в S дополняем и централен;*
2. *Все пирсовские слои полукольца S не имеют нетривиальных идемпотентов;*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Покажем, что при пирсовском представлении каждый центральный дополняемый идемпотент отображается или в ноль или в единицу для каждого слоя. Рассмотрим пирсовский слой над точкой M, и e — произвольный центральный дополняемый идемпотент. Если $e \in M$, то $0e^{\perp} = ee^{\perp}$ и $\widehat{e}(M) = \widehat{0}(M)$; если $e \notin M$, то $1e = ee$ и $\widehat{e}(M) = \widehat{1}(M)$. Обозначим через h естественный эпиморфизм S на слой в точке M. Пусть $\overline{e}^2 = \overline{e} \in S/\delta_M$, и $h(g) = \overline{e}$ для некоторого элемента $g \in S$. Тогда $h(g) = \overline{e} = \overline{e}^2 = h(g^2)$, откуда $gf = g^2 f = g^2 f^2$ для некоторого $f \in BS \setminus M$. Поскольку $h(gf) = h(g) = \overline{e}$, а по условию $gf \in BS$, то $h(gf)$ равен либо $\overline{0}$, либо $\overline{1}$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть $e^2 = e \in S$. Поскольку сечение $\widehat{e}$ равно в каждом слое идемпотенту, то по условию принимает в каждом слое либо ноль, либо единицу. Кроме того, множества, на которых такое сечение принимает как ноль, так и единицу, открыто-замкнуты. Ясно, что $\widehat{e}$ является центральным дополняемым идемпотентом полукольца всех глобальных сечений. Поэтому $e \in BS$. $\square$

2. Пирсовские цепи

Известно, что неразложимость полукольца в нетривиальную прямую сумму идеалов равносильна отсутствию в полукольце центральных дополняемых идемпотентов кроме нуля и единицы.

Определение 2.10. *Если S/ρ — неразложимое факторполукольцо полукольца S, и для любой конгруэнции $\rho' \leq \rho$ факторполукольцо S/ρ' не является неразложимым, то S/ρ называется* ***максимальным неразложимым фактором*** *(mi-фактором) полукольца S.*

Определение 2.11. *Пусть α — ординал и ρ_α — конгруэнция на полукольце S, определяемая следующим образом:*

1. *Если $\alpha = 0$, то $\rho_\alpha = 0$;*
2. *Если α — непредельный ординал, то S/ρ_α — некоторый пирсовский слой полукольца $S/\rho_{\alpha-1}$;*
3. *Если α — предельный ординал, то $\rho_\alpha = \vee_{\beta<\alpha}\rho_\beta$;*

Для некоторой конгруэнции ρ_γ верно равенство $\rho_\gamma = \rho_{\gamma+1}$. Множество $P(S) = \{\rho_\alpha : 0 \leq \alpha \leq \gamma\}$ назовем ***пирсовской цепью*** *полукольца S. Конгруэнция ρ_γ —* ***наибольшая конгруэнция*** *пирсовской цепи.*

Отметим, что полукольцо S может иметь более одной пирсовской цепи.

Предложение 2.4. *Если $\{S/\delta_i : i \in I\}$ — такое множество неразложимых факторполуколец, что для любых $i, j \in I$ конгруэнции δ_i и δ_j сравнимы, то S/δ — неразложимое полукольцо, где $\delta = \bigwedge_{i\in I} \delta_i$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\bigwedge \delta_i$ — нулевая конгруэнция, множество I линейно упорядочено и если $i \leq j$, то $\delta_i \geq \delta_j$.

Пусть e — ненулевой дополняемый идемпотент в S, и $h_i : S \to S/\delta_i$ — естественные эпиморфизмы. Если $h_i(e) = \overline{0} \in S/\delta_i$, то $e \equiv 0(\delta)$, откуда $e = 0$. Поэтому $h_j(e) \neq \overline{0} \in S/\delta_j$ для некоторого j. Тогда $h_k(e)$ — ненулевой дополняемый идемпотент полукольца S/δ_k для любого $k \geq j$. А поскольку S/δ_k неразложимые, то $h_k(e) = \overline{1} \in S/\delta_k, k \geq j$. Поскольку $\bigwedge_{k\geq j} \delta_k = \delta$, то $e^\perp \equiv 0(\delta)$ и $e^\perp = 0$, $e = 1$ и S неразложимо. □

Ниже нам потребуется утверждение, двойственно лемме Цорна, а именно, *если всякая цепь в частично упорядоченном множестве имеет точную нижнюю грань, то множество содержит минимальный элемент.*

Пусть S/ρ — неразложимое факторполукольцо и N — множество всех конгруэнций δ_i, таких что $\delta_i \leq \rho$ и S/δ_i — неразложимый фактор.

Тогда по предложениям 2.4 и аналогу леммы Цорна справедливо

Предложение 2.5. *Для любого неразложимого факторполукольца S/ρ существует такой mi-фактор S/δ, что $\delta \leq \rho$. В частности, каждое неразложимое факторполукольцо полукольца S — гомоморфный образ некоторого mi-фактора полукольца S.*

Предложение 2.6. *Пусть S/ρ — ненулевое неразложимое факторполукольцо полукольца S, и 0_β — класс нуля в S/β.*

1. *Если $\{e_i\}, i \in I$ — множество всех дополняемых идемпотентов в S, лежащих в 0_ρ, то S/δ — пирсовский слой полукольца S, где $a \equiv b(\delta) \Leftrightarrow ae^\perp = be^\perp$ для некоторого $e \in 0_\rho$;*

2. *Конгруэнция ρ содержит наибольшую конгруэнцию некоторой пирсовской цепи.*

Доказательство. 1. Достаточно показать, что множество M всех дополняемых идемпотентов из 0_δ является максимальным идеалом из BS.

Пусть $e \in BS \backslash M$. Тогда $e \notin 0_\rho$ и в силу неразложимости S/ρ идемпотент $e^\perp$ обязан лежать в 0_ρ и следовательно, $e^\perp \in M$. Получаем $1 = e + e^\perp \in eBS \oplus M$ и $M \in MaxBS$.

2. Пользуясь определением, построим пирсовскую цепь $\{\rho_\alpha\}$, все конгруэнции которой содержатся в ρ. Пусть α — непредельный ординал, тогда на факторполукольце $S/\rho_{\alpha-1} = S_{\alpha-1}$ конгруэнция $\rho/\rho_{\alpha-1}$ такова, что $S_{\alpha-1}/(\rho/\rho_{\alpha-1})$ — неразложимое факторполукольцо.

По (1) существует пирсовский слой S_α и конгруэнция $\rho_\alpha \leq \rho$ на полукольце S, связанная с естественным эпиморфизмом $S \to S_{\alpha-1}$. Если α — предельный ординал, то $\rho_\alpha = \bigvee_{\beta<\alpha} \rho_\beta$ очевидно удовлетворяет условию $\rho_\alpha \leq \rho$. Тогда и наибольшая конгруэнция этой цепи будет содержаться в ρ. $\square$

Предложение 2.7. *Пусть $\rho_\alpha, \rho_{\alpha+1}$ — соседние конгруэнции пирсовской цепи. Тогда $0_{\rho_\alpha} \subsetneq 0_{\rho_{\alpha+1}}$.*

Доказательство. Обозначим через $h_\alpha : S \to S/\rho_\alpha, h_{\alpha+1} : S \to S/\rho_{\alpha+1}$ естественные эпиморфизмы. Пирсовский слой $h_{\alpha+1}(S)$ изоморфен факторполукольцу $(S/\rho_\alpha)/\delta_M$ для некоторого $M \in MaxB(S/\rho_\alpha)$. Заметим, что идеал M ненулевой, так как S/ρ_α разложимо и имеет нетривиальные дополняемые идемпотенты. Пусть $\varphi : S/\rho_\alpha \to (S/\rho_\alpha)/\delta_M$ — естественный эпиморфизм. Имеем: $h_{\alpha+1} = h_\alpha \circ \varphi$. Тогда $Ker\varphi \neq \overline{0}_{\rho_\alpha}$, поскольку ядро содержит ненулевые дополняемые идемпотенты из M. Так как h_α — эпиморфизм, то для подходящих $a \in S$ и $\overline{e} \in M \backslash \overline{0}_{\rho_\alpha}$ получаем $h_\alpha(a) = \overline{e}$.

Тогда $a \in Kerh_{\alpha+1} \backslash Kerh_\alpha$, то есть $0_{\rho_\alpha} \subsetneq 0_{\rho_{\alpha+1}}$. $\square$

Предложение 2.8. *Если ρ — не единичная конгруэнция на полукольце S, то S/ρ — mi-фактор $\Leftrightarrow$ ρ — наибольшая конгруэнция некоторой пирсовской цепи.*

Доказательство.

$\Rightarrow$. По предложению 2.6(2), ρ содержит наибольшую конгруэнцию α некоторой пирсовской цепи. Поскольку S/α неразложимое факторполукольцо, $\alpha \leq \rho$ и S/ρ — mi-фактор, то $\alpha = \rho$.

$\Leftarrow$. Пусть ρ_γ — наибольшая конгруэнция некоторой пирсовской цепи. Предположим, что S/ρ_γ не является mi-фактором. Тогда существует такая конгруэнция γ, что $\gamma < \rho_\gamma$ и S/γ — неразложимое полукольцо. Рассмотрим два случая:

1. $0_\gamma \subsetneq 0_{\rho_\gamma}$. Поскольку классы нуля пирсовской цепи образуют строго возрастающую цепь, найдется ординал α такой, что $0_{\rho_\alpha} \subseteq 0_\gamma$ и $0_{\rho_{\alpha+1}} \nsubseteq 0_\gamma$. Пусть $h : S \to S/\rho_\alpha$ — естественный эпиморфизм. В силу регулярности идеала $h(0_{\rho_{\alpha+1}})$ в S/ρ_α найдется дополняемый идемпотент $\overline{e} \in h(0_{\rho_{\alpha+1}})\backslash h(0_\gamma)$. Рассмотрим конгруэнцию $\overline{\gamma} = \gamma\backslash\rho_\alpha$ на полукольце $\overline{S} = S\backslash\rho_\alpha$. Полукольцо $\overline{S}\backslash\overline{\gamma}$ неразложимо, поэтому $\overline{e} \equiv \overline{1}(\overline{\gamma})$. Тогда $\overline{e}^\perp \equiv \overline{0}(\overline{\gamma})$ и $\overline{e}^\perp \in h(0_\gamma)$. Отсюда $\overline{1} = \overline{e} + \overline{e}^\perp \in h(0_{\rho_{\alpha+1}}) + h(0_\gamma) \subseteq h(0_{\rho_\gamma})$ и $\overline{1} \equiv \overline{0}(\rho_\gamma\backslash\rho_\alpha)$. Получаем $1 \equiv 0(\rho_\gamma)$, противоречие с тем, что по любой конгруэнции пирсовской цепи, в частности по наибольшей, ноль и единица не сравнимы.

2. $0_\gamma = 0_{\rho_\gamma}$. Пусть $\gamma < \rho_\gamma$, S/γ — неразложимое факторполукольцо и $0_\gamma = 0_{\rho_\beta}$. Тогда $0_{\gamma-1} \subsetneq 0_\gamma$ и $h : S \to S/\rho_{\gamma-1}$ — естественный эпиморфизм. Конгруэнции $\gamma/\rho_{\gamma-1} < \rho_\gamma/\rho_{\gamma-1}$ на полукольце $S/\rho_{\gamma-1}$ различны, а классы нуля этих конгруэнций совпадают: $0_{\gamma/\rho_{\gamma-1}} = h(0_\gamma) = h(0_{\rho_\gamma}) = 0_{\rho_\gamma/\rho_{\gamma-1}}$. Поскольку факторполукольца $(S/\rho_{\gamma-1})/(\rho_\gamma/\rho_{\gamma-1})$ и $(S/\rho_{\gamma-1})/(\gamma/\rho_{\gamma-1})$ неразложимые, то все ненулевые дополняемые идемпотенты полукольца $S/\rho_{\gamma-1}$ попадают в классы единицы как первого, так и второго факторполукольца. Пусть $a \equiv b(\rho_\gamma/\rho_{\gamma-1})$ для произвольных $a, b \in S/\rho_{\gamma-1}$. Тогда $ae^\perp = be^\perp$ для некоторого $e \in 0_{\rho_{\gamma-1}}$, и $ae^\perp \equiv be^\perp(\gamma/\rho_{\gamma-1})$. Получаем $a = a \cdot 1 \equiv ae^\perp \equiv be^\perp \equiv b \cdot 1 = b(\gamma/\rho_{\gamma-1})$ и $\rho_\gamma/\rho_{\gamma-1} \leq \gamma/\rho_{\gamma-1}$, противоречие.

$\square$

Предложение 2.9. *Пусть A — собственный регулярный идеал, ρ — A-регулярная конгруэнция, $h : S \to S/\rho$ — естественный эпиморфизм.*

1. *Если S/ρ не является пирсовским слоем полукольца S, то существует такой дополняемый идемпотент $e \in S$, что $A + eS$ и $A + e^\perp S$ — собственные регулярные идеалы в S, строго содержащие идеал A,*

$$S = (A + eS) + (A + e^\perp S),$$
$$A = (A+eS)(A+e^\perp S) = (A+e^\perp S)(A+eS) = (A+eS) \cap (A+e^\perp S),$$
$$h(S) \cong h(eS) \oplus h(e^\perp S).$$

2. *Для любого идемпотента $\overline{e} \in S/\rho$ существует такой идемпотент $e \in S$, что $h(e) = \overline{e}$.*

3. *Если S/ρ — пирсовский слой полукольца S и e — дополняемый идемпотент в S, то либо $e \in 0_\rho$ либо $e^\perp \in 0_\rho$.*

4. *Если полукольцо S/ρ неразложимо, то S/ρ — пирсовский слой для S.*

5. *Найдется хотя бы один такой пирсовский слой S/γ, что $\rho \leq \gamma$.*

6. *Пусть d не является левым (правым) уравнителем в полукольце S. Тогда $h(d)$ не является левым (правым) уравнителем в полукольце S/ρ.*

7. *Если d — элемент в S с нулевым правым (левым) аннулятором, то в полукольце S/ρ элемент $h(d)$ имеет нулевой правый (левый) аннулятор.*

Доказательство. 1. Идеал A строго содержится в некотором максимальном идеале $M \in MaxBS$, поэтому существует идемпотент $e \in M \backslash A$. Поскольку $A + eS \subseteq M$, то $A + eS$ — собственный идеал. Если $A + e^{\perp}S = S$, то $e \in e(A + e^{\perp}S) \subseteq A$, поэтому $A + e^{\perp}S$ — собственный идеал. Идеал $A + e^{\perp}S$ строго содержит A, так как в противном случае $1 = e^{\perp} + e \in A + eS \subseteq M$. Оставшиеся утверждения очевидны.

2. Пусть $\overline{e} = h(a)$. Поскольку $h(a^2) = \overline{e}^2 = \overline{e} = h(a)$, то $a^2 \equiv a(\rho)$. Следовательно, $a^2e^{\perp} = ae^{\perp}$ для некоторого $e \in A$. Идемпотент $e^{\perp}$ централен, поэтому $(ae^{\perp})^2 = ae^{\perp}$. Наконец, $\overline{e} = h(a) = h(a(e + e^{\perp})) = h(a)h(e) + h(ae^{\perp}) = h(ae^{\perp})$.

3. Пусть $e \notin 0_{\rho}$. Идеал $0_{\rho} \cap BS$ является максимальным идеалом булева кольца BS. Так как $ee^{\perp} = 0 \in 0_{\rho} \cap BS$, то $e^{\perp} \in 0_{\rho} \cap BS$ в силу простоты максимального идеала.

4. Следует из 1.

5. Идеал $A \cap BS$ содержится в некотором максимальном идеале M кольца BS. Для MS-регулярной конгруэнции γ выполняется $\rho \leq \gamma$ и S/γ — пирсовский слой.

6. Предположим, $h(d)h(a) = h(d)h(b)$. Тогда $da \equiv db(\rho)$, откуда $dae^{\perp} = dbe^{\perp}$ для некоторого $e \in 0_{\rho}$. Поскольку d не является левым уравнителем, то $ae^{\perp} = be^{\perp}$, что означает $h(a) = h(b)$.

7. Следует из 6.

□

3. Применение пирсовских цепей

Определение 3.12. *Полукольцо S называется* ***абелевым****, если каждый его идемпотент централен.*

Теорема 2. *Для полукольца S равносильны условия:*

1. *S — абелево полукольцо;*

2. *Для каждого собственного регулярного идеала A полукольцо S/ρ_A абелево, где ρ_A — A-регулярная конгруэнция;*

3. *Все пирсовские слои полукольца S — абелевы полукольца.*

Доказательство. $(2) \Rightarrow (3)$. Очевидно.

$(3) \Rightarrow (1)$. Пусть $e = e^2 \in S$, S/ρ_M — пирсовский слой для любого $M \in MaxBS$ и $h_M : S \to S/\rho_M$ — естественные эпиморфизмы. Так как $h_M(e)$ — идемпотент абелева полукольца $h_M(S)$, то $h_M(e)h_M(a) = h_M(a)h_M(e)$ для любого a из S. Получаем, что $ea \equiv ae(\rho_M)$ для любого $M \in MaxBS$. Другими словами, образы элементов ea и ae совпадают в каждом слое пирсовского пучка. Поскольку пирсовское представление изоморфно для любого полукольца, то $ea = ae$.

$(1) \Rightarrow (2)$. Пусть $h : S \to S/\rho$ — естественный эпиморфизм и $\overline{e} = \overline{e}^2 \in h(S)$. По предложению 2.9(2), $\overline{e} = h(e)$ для некоторого идемпотента $e \in S$. Так как S абелево, то e централен. Тогда $\overline{e} = h(e)$ централен в $h(S)$. □

Определение 3.13. *Пусть $a_1, \ldots, a_m \in S$ и f_i, g_i $(i = 1, \ldots, k)$ — фиксированные многочлены с целыми неотрицательными коэффициентами от некоммутирующих переменных $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$, свободные члены которых равны 0. Отображение $h_\rho : S \to S/\rho$ — естественный эпиморфизм. Конгруэнцию ρ назовем* ***специальной****, если для некоторых $\overline{b}_1, \ldots \overline{b}_n \in S/\rho$ верны равенства*

$$f_i(h_\rho(a_1), \ldots, h_\rho(a_m), \overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n}) = g_i(h_\rho(a_1), \ldots, h_\rho(a_m), \overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n})$$

для всех $i = 1, \ldots, k$.

Обозначим через $\mathcal{E}$ множество всех неспециальных конгруэнций (относительно элементов и многочленов, указанных в предыдущем определении), через $\mathcal{E}^*$ — подмножество в $\mathcal{E}$, состоящее из всех регулярных неспециальных конгруэнций.

Лемма 3.1. *Если нулевая конгруэнция лежит в $\mathcal{E}^*$, то и $\mathcal{E}$, и $\mathcal{E}^*$ содержат максимальные элементы.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную возрастающую цепь конгруэнций $\{\rho_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq \mathcal{E}$ и покажем, что $\rho = \bigvee_\alpha \rho_\alpha \in \mathcal{E}$.

Для любого $\alpha \in I$ обозначим через $\rho_\alpha(a) = \{s \in S : s \equiv a(\rho_\alpha)\}$ и $\overline{a} = \bigcup_{\alpha \in I} \rho_\alpha(a)$. Если $\overline{a} \cap \overline{b} \ni s$, то $s \equiv a(\rho_{\alpha_1}), s \equiv b(\rho_{\alpha_2})$ для некоторых

$\alpha_1, \alpha_2 \in I$. Тогда $\overline{a} = \overline{b}$, откуда получаем разбиение полукольца S на классы вида $\overline{a}$ и соответствующее бинарное отношение $\overline{\rho}$. Стандартно проверяется, что $\overline{\rho}$ — конгруэнция на S, очевидно являющаяся верхней гранью конгруэнций $\rho_\alpha, \alpha \in I$.

Если $\overline{\rho}$ является специальной, то выполняются равенства

$$f_i(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_m}, \overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n}) = g_i(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_m}, \overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n}).$$

Заметим, что тогда

$$\overline{f_i(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n)} = \overline{g_i(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n)} \in S/\overline{\rho}$$

и по определению $\overline{\rho}$

$$f_i(h_{\rho_{j_i}}(a_1), \ldots, h_{\rho_{j_i}}(a_m), h_{\rho_{j_i}}(b_1), \ldots, h_{\rho_{j_i}}(b_n)) =$$
$$= g_i(h_{\rho_{j_i}}(a_1), \ldots, h_{\rho_{j_i}}(a_m), h_{\rho_{j_i}}(b_1), \ldots, h_{\rho_{j_i}}(b_n))$$

для некоторых $\rho_{j_i}, j_i \in I$. Выбрав максимум j из $j_i, i = 1, \ldots, k$, получим, что $\rho_j \in \mathcal{E}$ является специальной, противоречие. Тогда точная верхняя грань ρ не является специальной, поскольку $S/\overline{\rho}$ является факторполукольцом полукольца S/ρ. (Рассуждения фактически показывают совпадение ρ и $\overline{\rho}$).

Рассмотрим ситуацию с $\mathcal{E}^*$. Заметим, что регулярная конгруэнция однозначно определяет и определяется регулярным идеалом — своим классом нуля. Поскольку объединение любой возрастающей цепи регулярных идеалов является регулярным идеалом, то точная верхняя грань возрастающей цепи конгруэнций из $\mathcal{E}^*$ лежит в $\mathcal{E}^*$. По лемме Цорна $\mathcal{E}^*$ содержит максимальный элемент. □

Теорема 3. *Пусть S — полукольцо, $a_1, \ldots, a_m \in S, f_i, g_i (i = 1, \ldots, k)$ — многочлены с целыми неотрицательными коэффициентами от некоммутирующих переменных $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ и свободные члены многочленов равны 0. Через $h_\rho : S \to S/\rho$ обозначим естественный эпиморфизм. Равносильны условия:*

1. *$f_i(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) = g_i(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n), i = 1, \ldots, k$ для некоторых $b_1, \ldots, b_n \in S$;*

2. *Для каждого факторполукольца S/ρ найдутся такие $\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n} \in S/\rho$, что справедливы равенства:*

$$f_i(h_\rho(a_1), \ldots, h_\rho(a_m), \overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n}) = g_i(h_\rho(a_1), \ldots, h_\rho(a_m), \overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n}),$$
$$i = 1, \ldots, k;$$

3. *Для каждого пирсовского слоя S/ρ найдутся такие $\overline{b_1},\ldots,\overline{b_n} \in S/\rho$, что справедливы равенства:*

$$f_i(h_\rho(a_1),\ldots,h_\rho(a_m),\overline{b_1},\ldots,\overline{b_n}) = g_i(h_\rho(a_1),\ldots,h_\rho(a_m),\overline{b_1},\ldots,\overline{b_n}),$$
$$i = 1,\ldots,k;$$

4. *Для каждого неразложимого факторполукольца S/ρ найдутся такие $\overline{b_1},\ldots,\overline{b_n} \in S/\rho$, что справедливы равенства:*

$$f_i(h_\rho(a_1),\ldots,h_\rho(a_m),\overline{b_1},\ldots,\overline{b_n}) = g_i(h_\rho(a_1),\ldots,h_\rho(a_m),\overline{b_1},\ldots,\overline{b_n}),$$
$$i = 1,\ldots,k;$$

5. *Для каждого mi-фактора S/ρ найдутся такие $\overline{b_1},\ldots,\overline{b_n} \in S/\rho$, что справедливы равенства:*

$$f_i(h_\rho(a_1),\ldots,h_\rho(a_m),\overline{b_1},\ldots,\overline{b_n}) = g_i(h_\rho(a_1),\ldots,h_\rho(a_m),\overline{b_1},\ldots,\overline{b_n}),$$
$$i = 1,\ldots,k.$$

Доказательство. Очевидны импликации (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3), (2) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5). Импликация (5) $\Rightarrow$ (4) верна потому, что каждое неразложимое факторполукольцо изоморфно факторполукольцу некоторого mi-фактора.

(3) $\Rightarrow$ (1). Допустим, (1) не верно. Тогда нулевая конгруэнция лежит в $\mathcal{E}^*$ и, по лемме 3.1, в $\mathcal{E}^*$ существует максимальный элемент ρ. Покажем, что S/ρ является пирсовским слоем. Предположим, что это не так. Тогда, по предложению 2.9(1), существует такой дополняемый идемпотент $e \in S$, что $A = 0_\rho + eS$ и $B = 0_\rho + e^\perp S$ — собственные регулярные идеалы в S, строго содержащие 0_ρ и $S/\rho \cong S/\rho_A \times S/\rho_B$. Через ρ_A и ρ_B обозначены A-регулярная и B-регулярная конгруэнции соответственно. Конгруэнции ρ_A и ρ_B строго больше ρ, поэтому не лежат в $\mathcal{E}^*$. Тогда конгруэнции ρ_A и ρ_B являются специальными, поэтому и ρ специальна. Противоречие показывает, что S/ρ — пирсовский слой. Таким образом, если не верно (1), то не выполняется (3).

(4) $\Rightarrow$ (1). Допустим, (1) не верно. В этом случае нулевая конгруэнция лежит в $\mathcal{E}$ и, по лемме 3.1, в $\mathcal{E}$ существует максимальный элемент ρ. Достаточно показать, что S/ρ неразложимое полукольцо. Предположим, что S/ρ разложимо и $S/\rho \cong S/\rho_1 \times S/\rho_2$ для некоторых конгруэнций ρ_1 и ρ_2. Поскольку $\rho < \rho_1$ и $\rho < \rho_2$, то $\rho_1, \rho_2 \notin \mathcal{E}$. Непосредственно проверяется, что ρ — специальная конгруэнция, противоречие. $\square$

Определение 3.14. *Полукольцо S назовем* **заменяемым справа**, *если для любых $a, b \in S$, таких что $a + b = 1$ найдется дополняемый (не обязательно центральный) идемпотент e, такой что $e \in aS, e^{\perp} \in bS$.*

Лемма 3.2. *Факторполукольцо по регулярной конгруэнции заменяемого справа полукольца заменяемо справа, в частности, пирсовский слой заменяемого справа полукольца – заменяемое справа полукольцо.*

Доказательство. Пусть S – заменяемо справа, A – регулярный идеал и ρ – A-регулярная конгруэнция. Допустим, $\overline{a}+\overline{b} = \overline{1}$ в S/ρ для некоторых $a, b \in S$, тогда $a + b \equiv 1(\rho)$, поэтому $(a + b)g^{\perp} = g^{\perp}$ для подходящего дополняемого идемпотента $g \in A$. Имеем $(ag^{\perp} + g) + bg^{\perp} = 1$ и по условию найдется такой дополняемый (не обязательно центральный) идемпотент e, что $e = (ag^{\perp} + g)s$ и $e^{\perp} = bg^{\perp}t$ для некоторых $s, t \in S$. Получаем: $\overline{e} = \overline{ag^{\perp}s + gs} = \overline{ag^{\perp}s} \in \overline{a}S/\rho$, $\overline{e}^{\perp} = \overline{e^{\perp}} = \overline{bg^{\perp}t} \in \overline{b}S/\rho$. □

Теорема 4. *Для полукольца S равносильны условия:*

1. *S — заменяемое справа полукольцо;*
2. *Все пирсовские слои S — заменяемые справа полукольца;*
3. *Все mi-факторы для S — заменяемые справа полукольца.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) по лемме 3.2.

(1) $\Rightarrow$ (3). По теореме 2.8 mi-фактор полукольца S является "последним пирсовским слоем" для некоторой пирсовской цепи.
Докажем трансфинитной индукцией, что факторполукольца S/ρ_γ заменяемого справа полукольца S по конгруэнциям $\{\rho_\gamma\}$ пирсовской цепи заменяемы справа. Учитывая лемму 3.2, требуется показать справедливость утверждения только для предельного ординала: пусть α — предельный ординал, ρ_α – конгруэнция пирсовской цепи. Если $h_\alpha(a) + h_\alpha(b) = h_\alpha(1)$ ($h_\alpha : S \to S/\rho_\alpha$ — естественный эпиморфизм), то $a + b \equiv 1(\rho_\beta)$ для некоторой конгруэнции $\rho_\beta \in \{\rho_\gamma\}, \beta < \alpha$. В силу заменяемости справа конгруэнций с меньшими индексами, чем α, существуют такие дополняемые идемпотенты $h_\beta(e)$ и $h_\beta(e)^{\perp}$, что $h_\beta(e) \in h_\beta(a)S/\rho_\beta$, $h_\beta(e)^{\perp} \in h_\beta(b)S/\rho_\beta$. Пусть $\varphi : S/\rho_\beta \to S/\rho_\alpha$ – естественный гомоморфизм, тогда $\overline{e} = \varphi(h_\beta(e))$ и $\overline{e}^{\perp} = \varphi(h_\beta(e)^{\perp})$ – дополняемые (не обязательно центральные) идемпотенты, такие что $\overline{e} \in h_\alpha(a)S/\rho_\alpha, \overline{e}^{\perp} \in h_\alpha(b)S/\rho_\alpha$. Таким образом, верна импликация (1) $\Rightarrow$ (3).

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4$ — некоммутирующие переменные. Выберем многочлены:

$$\begin{array}{ll} f_1(y_1) = y_1, & g_1(y_1) = y_1^2, \\ f_2(y_1, y_2) = y_1 + y_2, & g_2(x_1) = x_1, \\ f_3(y_1, y_2) = y_1 y_2, & g_3(x_2) = x_2, \\ f_4(y_1) = y_1, & g_4(x_3, y_3) = x_3 y_3, \\ f_5(y_2) = y_2, & g_5(x_4, y_4) = x_4 y_4. \end{array}$$

Пусть S/ρ — пирсовский слой полукольца S, $h : S \to S/\rho$ — естественный эпиморфизм. Выберем $a, b \in S$, такие что $a + b = 1$, следовательно, $h(a) + h(b) = \overline{1}$. По условию $h(S)$ — заменяемое справа полукольцо, поэтому найдутся такие $\overline{e}, \overline{f}, \overline{s}, \overline{t} \in h(S)$, что

$$\begin{aligned} f_1(\overline{e}) &= \overline{e} = \overline{e}^2 = g_1(\overline{e}), \\ f_2(\overline{e}, \overline{f}) &= \overline{e} + \overline{f} = h(1) = g_2(h(1)), \\ f_3(\overline{e}, \overline{f}) &= \overline{e}\overline{f} = h(0) = g_3(h(0)), \\ f_4(\overline{e}) &= \overline{e} = h(a)\overline{s} = g_4(h(a), \overline{s}), \\ f_5(\overline{f}) &= \overline{f} = h(b)\overline{t} = g_5(h(b), \overline{t}). \end{aligned}$$

По теореме 3 равенства $f_i(1, 0, a, b, e, f, s, t) = g_i(1, 0, a, b, e, f, s, t)$, $i = 1, \ldots, 5$, верны в S для некоторых $e, f, s, t \in S$, значит S заменяемо справа.

(3) $\Rightarrow$ (1). Доказывается аналогично предыдущей импликации с заменой слов “пирсовский слой” на “максимальный неразложимый фактор”. □

Определение 3.15. *Полукольцо S называется* ***правым полукольцом Безу****, если каждый конечно порожденный правый идеал из S является главным правым идеалом.*

Лемма 3.3. *Для полукольца S равносильны условия:*

1. *Полукольцо S является полукольцом Безу;*
2. $(\forall m, n \in S)(\exists a, b, c, d \in S)(m = mac + nbc, n = nbd + mad)$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $m, n \in S$. Правый идеал $mS + nS$ является главным правым идеалом zS для некоторого $z \in S$. Тогда $z = ma + nb$ для некоторых $a, b \in S$. С другой стороны, $m = zc, n = zd$ для некоторых $c, d \in S$, откуда следует (2).

(2) $\Rightarrow$ (1). Покажем, что правый идеал $mS + nS$ является главным правым идеалом. Рассмотрим произвольный элемент $ms_1 + ns_2 \in mS + nS$. По условию $ms_1 + ns_2 = macs_1 + nbcs_1 + nbds_2 + mads_2 = (ma + nb)(cs_1 + ds_2) \in zS$, где $z = ma + nb$. Очевидно, $zS \subseteq mS + nS$. □

Теорема 5. *Для полукольца S равносильны условия:*

1. *S — правое полукольцо Безу;*
2. *Все пирсовские слои полукольца S — правые полукольца Безу;*
3. *Все неразложимые факторполукольца полукольца S — правые полукольца Безу;*
4. *Все mi-факторы для S — правые полукольца Безу.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2), (1) $\Rightarrow$ (3) следуют из того, что каждое факторполукольцо правого полукольца Безу — правое полукольцо Безу. (3) $\Rightarrow$ (4) очевидно.

По той же причине, с помощью предложения 2.5, следует (4) $\Rightarrow$ (3).

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть $m, n \in S$ и

$$f_1(x_1) = x_1, \qquad g_1(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = x_1y_1y_3 + x_2y_2y_3, \qquad -$$
$$f_2(x_2) = x_2, \qquad g_2(x_1, x_2, y_1, y_2, y_4) = x_1y_1y_4 + x_2y_2y_4$$

многочлены над полукольцом целых неотрицательных чисел от некоммутирующих переменных $x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4$.

Пусть $h(S) = S/\rho$ — произвольный пирсовский слой полукольца S, $h : S \to S/\rho$ — естественный эпиморфизм. Поскольку $h(S)$ — правое полукольцо Безу, то существуют такие $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d} \in h(S)$, что

$$h(m) = h(m)\overline{ac} + h(n)\overline{bc}, \;\; h(n) = h(m)\overline{ad} + h(n)\overline{bd}.$$

По теореме 3 существуют такие $a, b, c, d \in S$, что $m = mac + nbc, n = nbd + mad$. По лемме 3.3, S — правое полукольцо Безу.

(3) $\Rightarrow$ (1) доказывается аналогично. □

Литература

1. **Вечтомов Е. М.** Функциональные представления колец. — *М.: Изд-во МПГУ, 1993.*
2. **Туганбаев А. А.** Теория колец. Арифметические модули и кольца. — *М.: МЦНМО, 2009.*
3. **Чермных В. В.** Пучковые представления полуколец // *Успехи мат. наук. — 1993. — Т. 48, № 5. — С. 185–186.*
4. **Чермных В. В.** Функциональные представления полуколец. — *Киров: Изд-во ВятГГУ, 2010.*

5. **Burgess W. D., Stephenson W.** Pierce sheaves of non–commutative rings // *Comm. Algebra. — 1976. — V. 39. — P. 512–526.*

6. **Burgess W. D., Stephenson W.** An analogue of the Pierce sheaf for non–commutative rings // *Comm. Algebra. — 1978. — V. 6, № 9. — P. 863–886.*

7. **Burgess W. D., Stephenson W.** Rings all of whose Pierce stalks are local // *Canad. Math. Bull. — V. 22, № 2. — 1979. — P. 159–164.*

8. **Pierce R. S.** Modules over commutative regular rings // *Mem. Amer. Math. Soc. — 1967. — V. 70. — P. 1–112.*

Summary

Markov R. V., Chermnykh V. V. Pierce chains for semirings

The article introduces the concept of Pierce chains for semirings. This generalizes the ring construction. It presents basic properties and some applications of this construction: characterization of Abelian semirings, right-changed semirings, right Bezout semirings.

Keywords: semiring, Pierce beam, Pierce layer, Pierce chain, functional representation of the semiring, characterization of semirings.

Вятский государственный
гуманитарный университет

Поступила 21.02.2012