Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.16.2012

УДК 513.88

О МОДУЛЯРАХ МАРЦИНКЕВИЧА НА $[0,1]$ И НА $[0,\infty)$ – *II*

А. А. Меклер

В работе продолжается изучение связи между свойствами модуляры быть субмультипликативной; псевдостепенной; иметь регулярное изменение. Основными результатами являются Теорема 5 и Теорема 10, характеризующие p-выпуклость пространств Марцинкевича/Лоренца на [0,1].
Библиогр. 7 назв.
Ключевые слова: псевдостепенные, суб-(супер)мультипликативные эквивогнутые функции.

Используемые здесь терминология и обозначения даны в приводимых по ходу изложения ссылках и содержатся частично в [2], но главным образом - в статье [7], продолжением которой является настоящая работа, а также в более ранних статьях автора [4] — [6], опубликованных, как и [7], в предыдущих выпусках Вестника Сыктывкарского Университета.

Работа состоит из двух параграфов. Теорема 3 в первом из них уточняет критерий регулярного изменения симметрической эквивогнутой функции на $[0,\infty)$, который для функций на $[0,1]$ сформулирован в терминах базы в Теореме 5 из [4]. Теорема 5, главный результат §1, усиливает теорему 5.9 из [7], показывая, что среди пяти её равносильных условий четвёртое и пятое содержат лишнее требование. Этот факт позволяет дать прозрачную интерпретацию в терминах баз свойству симметрических эквивогнутых функций, [5] - [6], быть псевдостепенными, [7]. А именно, для выполнения этого свойства база функции должна быть *уплотняющейся*, см. Определение 2, §1.

Теорема 10, основной результат §2, устанавливает *субмультипликативность слева* всякой заданной на полуоси псевдостепенной эквивогутой функции, см. Определение 4, §2.

§1. Эквивогнутые функции: *симметрические, регулярного изменения и псевдостепенные*

Определение 1. Отображение, определённое на множестве всех нормирующих функций формулой (3.6), [7]:

$$\hat{\xi}(t) := \frac{1}{\xi(\frac{1}{t})},\ t \in (0,\infty),$$

мы называем *симметрией.*

В [7] отмечалось, что симметрия есть инволюция на подмножестве всех эквивогнутых функций на $[0,\infty)$.

Следующие утверждения дополняют Лемму 4.5, [7].

Лемма 1.

$$1).\ \mathfrak{L}^{\infty}_{\hat{\xi}}(s) = \mathfrak{L}^{0}_{\xi}(s),\ 0 \le s < \infty,\ 2).\ \mathfrak{S}^{\infty}_{\hat{\xi}}(s) = \mathfrak{S}^{0}_{\xi}(s),\ 0 \le s < \infty.$$

Доказательство.
1). $\mathfrak{L}^{\infty}_{\hat{\xi}}(s) := \limsup_{t\to\infty} \frac{\hat{\xi}(s\cdot t)}{\hat{\xi}(t)} = \limsup_{t\to\infty} \frac{\xi(\frac{1}{t})}{\xi(\frac{1}{s\cdot t})} =$
$\Big(w = \frac{1}{s\cdot t};$ при $0 < s < \infty$ имеем : $t \to \infty \Leftrightarrow w \to 0\Big)$
$= \limsup_{w\to 0} \frac{\xi(s\cdot w)}{\xi(w)} := \mathfrak{L}^{0}_{\xi}(s)$. Аналогично
2). $\mathfrak{S}^{\infty}_{\hat{\xi}}(s) := \sup_{t\ge 1,\ s\cdot t\ge 1} \frac{\hat{\xi}(s\cdot t)}{\hat{\xi}(t)} = \sup_{t\ge 1,\ s\cdot t\ge 1} \frac{\xi(\frac{1}{t})}{\xi(\frac{1}{s\cdot t})} =$
$\sup\limits_{0\le w\le 1,\ s\cdot w\le 1\ \left(w=\frac{1}{s\cdot t},\ 0<w,\ s\cdot w\le 1\right)} \frac{\xi(s\cdot w)}{\xi(w)} := \mathfrak{S}^{0}_{\xi}(s),\ 0 \le s < \infty.\ \square$

Теперь, поскольку $\widehat{(s^{\alpha})} = s^{\alpha},\ 0 \le s < \infty$, то отсюда и из Леммы 4.5, [7], вытекает

Следствие 2. Для эквивогнутой на полуоси $[0,\infty)$ функции ξ и для любого $\alpha :\ 0 < \alpha \le 1$, равносильны эквивалентности

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=n+1}^{n+m} \chi_{b_{\xi}}(j)}{m} \overset{m}{\sim} \alpha \Leftrightarrow \mathfrak{L}^{\infty}_{\xi}(s) \overset{m}{\sim} \mathfrak{L}^{\infty}_{s^{\alpha}} \overset{m}{\sim} s^{\alpha} \Leftrightarrow \mathfrak{L}^{0}_{L\hat{\xi}} \overset{m}{\sim} s^{\alpha} \Leftrightarrow \hat{\xi} \in (P^{0}_{\alpha})$$

$$\Leftrightarrow \frac{\liminf_{n\to\infty} \sum_{j=n+1}^{n+m} \chi_{b_{\hat{\xi}}}(j)}{m} \overset{a}{\sim} \alpha,\ m \ge 0,\ 0 \le s < \infty,$$

откуда логарифмированием условий, лежащих в определении свойств

P_α^0 и P_α^∞ регулярности изменения в нуле (соответственно, на бесконечности, [4], [5]) для *симметрической* функции ξ при $m \geq 0$ имеем:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=n+1}^{n+m} \chi_{b_\xi}(j)}{m} \overset{a}{\sim} \alpha \Leftrightarrow \xi \in (P_\alpha^0) \Leftrightarrow \xi \in (P_\alpha^\infty) \Leftrightarrow \frac{\limsup\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=n+1}^{n+m} \chi_{b_\xi}(j)}{m} \overset{a}{\sim} \alpha. \tag{1}$$

□

Напомним, что *симметрической* называется $\overset{m}{\sim}$инвариантная по отношению к симметрии эквивогнутая функция, т.е. такая ξ, что $\hat{\xi}(t) \overset{m}{\sim} \xi(t),\ t \geq 0$, см. Определение 3.3, [7]. По Лемме 4.2 эквивогнутая функция ξ симметрическая, тогда и только тогда, когда её правая и левая базы $\overset{m}{\sim}$эквивалентны: $b_\xi^\infty \overset{a}{\sim} b_\xi^0$.

Таким образом верна

Теорема 3. При любом $\alpha,\ 0 < \alpha \leq 1$, для симметрической эквивогнутой функции ξ на $[0, \infty)$ с базой $b_\xi^0 = b_\xi^\infty := b_\xi$ следующие условия равносильны:
1). В нуле и на бесконечности ξ имеет регулярное изменение с показателем α;
2). Существует двойной предел $\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \frac{m}{b_\xi(n+m)-b_\xi(n)}$, равный α;
3). $\frac{\liminf_{n\to\infty} \sum_{j=n+1}^{n+m} \chi_{b_\xi}(j)}{m} \overset{a}{\sim} \alpha,\ m \geq 0$;
4).$\frac{\limsup_{n\to\infty} \sum_{j=n+1}^{n+m} \chi_{b_\xi}(j)}{m} \overset{a}{\sim} \alpha,\ m \geq 0$.

Схема доказательства.

1)$\Leftrightarrow$ 2) : Теорема 5, [4];

2) $\Rightarrow$ 3) : 2) $\Leftrightarrow$ (P_α^0), [4]; 1) $\Leftrightarrow$ 2) и первая равносильность в (1);

3) $\Rightarrow$ 4) : вторая и третья равносильности в (1);

4) $\Rightarrow$ 1) : прологарифмированное условие $\xi \in (P_\alpha^0)$, [3].

□

Замечание 4. 1. Любое из условий 1) — 4) влечёт наличие базы $b \overset{a}{\sim} b_\xi$, для которой существует $\frac{\lim_{n\to\infty} \sum_{j=n+1}^{n+m} \chi_b(j)}{m} \overset{m}{\sim} \alpha$ (ср. с Теоремой 5, [3]).
2. Из определений двойственной функции, двойственной базы и п.2) сразу вытекает, что эквивогнутая функция χ имеет регулярное изменение с показателем α, тогда и только тогда, когда двойственная функция χ_* имеет регулярное изменение с показателем $1 - \alpha$.

Далее мы используем понятие (двусторонней) суб-(супер)мультипликативности, [5]: нормирующая функция ξ на $[0, \infty)$ называется суб-(супер)мультипликативной, если найдётся константа $c > 0$, такая что для любых $s, t \geq 0$ справедливо

$$\xi(s \cdot t) \leq c \cdot \xi(s) \cdot \xi(t), \text{ соответственно, } \xi(s \cdot t) \geq c \cdot \xi(s) \cdot \xi(t).$$

Перейдём к нашей главной цели. Следующее утверждение сформулировано в [7] как Теорема 5.9.

Пусть ξ симметрическая функция, $0 < \gamma_\xi \leq \delta_\xi < 1$, и пусть b_ξ^∞, b_ξ^0 обозначают её правую и, соответственно, левую базы: $b_\xi^\infty \overset{a}{\sim} b_\xi^0$. Следующие условия равносильны:

$$1).\ \xi \text{ псевдостепенная;}$$

$$2).\ \mathfrak{S}_\xi^\infty(s) \overset{m}{\sim} s^{\delta_\xi},\ 1 \leq s < \infty;$$

$$3).\ \mathfrak{S}_{\xi_*}^\infty(s) \overset{m}{\sim} s^{\gamma_{\xi_*}},\ 0 \leq s \leq 1;$$

$$4).\ \mathfrak{S}_\xi^\infty(s) \overset{m}{\sim} \mathfrak{L}_\xi^\infty(s) \overset{m}{\sim} s^{\delta_\xi},\ 1 \leq s < \infty;$$

$$5).\ S_{b_\xi^\infty}(k) \overset{a}{\sim} L_{b_\xi^\infty}(k) \overset{a}{\sim} k \cdot \delta_{b_\xi^\infty},\ k \geq 1.$$

Теорема 5. В последних двух условиях от вторых $\overset{m}{\sim}$ и, соответственно, $\overset{a}{\sim}$эквивалентностей можно освободиться. Иными словами условия 4) и 5) можно заменить, соответственно, условиями

$$4') : \mathfrak{S}_\xi^\infty(s) \overset{m}{\sim} \mathfrak{L}_\xi^\infty(s),\ 1 \leq s < \infty, \text{ и } 5') : S_{b_\xi^\infty}(k) \overset{a}{\sim} L_{b_\xi^\infty}(k),\ k \geq 1,$$

каждое из которых равносильно тому, что симметрическая функция ξ является псевдостепенной (ср. с Теоремой 2.5, [7]).

Доказательство. Поскольку между собой условия $4')$ и $5')$ равносильны (см. Следствие 2.3, [6]), то достаточно доказать справедливость импликации $4') \Rightarrow 2)$; обратная импликация содержится в импликации $1) \Rightarrow 4)$ Теоремы 5.9.

По Теореме 5, [4], Лемме 1.10, [6] и Лемме 4.6, [7], обе субмультипликативные на всей полуоси функции $\mathfrak{S}_\xi^0 \overset{m}{\sim} \mathfrak{S}_\xi$ и $\mathfrak{L}_\xi^\infty \overset{m}{\sim} \mathfrak{L}_\xi^0$ имеют регулярное изменение на $[0,1]$ и, тем самым, по сформулированной выше Теореме 3 - на $[1,\infty)$. То есть найдутся числа $\alpha_{\mathfrak{S}}$ и $\alpha_{\mathfrak{L}^\infty}$, такие что эквивалентности $\mathfrak{L}_{\mathfrak{L}^\infty}^\infty(s) \overset{m}{\sim} s^{\alpha_{\mathfrak{L}^\infty}}$, $\mathfrak{L}_{\mathfrak{S}}^\infty(s) \overset{m}{\sim} s^{\alpha_{\mathfrak{S}}}$, $1 \leq s < \infty$, выполняются на всей полуоси. Ясно, что в силу $\overset{m}{\sim}$эквивалентности $\mathfrak{S}_\xi \overset{m}{\sim} \mathfrak{L}_\xi^\infty$ справедливо равенство $\alpha_{\mathfrak{S}} = \alpha_{\mathfrak{L}^\infty}$.

По Лемме 2.3, [5], эквивалентность $\mathfrak{S}_{\mathfrak{S}_\xi} \overset{m}{\sim} \mathfrak{S}_\xi$ имеет место для субмультипликативной функции $\mathfrak{S}_\xi$ на $[1,\infty)$, значит по определению верхнего индекса $\delta_{\mathfrak{S}_\xi} = \lim_{s\to\infty} \frac{\log_2 \mathfrak{S}_{\mathfrak{S}_\xi}(s)}{\log_2 s} = \lim_{s\to\infty} \frac{\log_2 \mathfrak{S}_\xi(s)}{\log_2 s} = \delta_\xi$. По той же причине для субмультипликативной функции $\mathfrak{L}_\xi^\infty$ в силу эквивалентностей $\mathfrak{S}_\xi \overset{m}{\sim} \mathfrak{L}_\xi^\infty \overset{m}{\sim} \mathfrak{S}_{\mathfrak{L}_\xi^\infty}$ справедливы равенства $\delta_{\mathfrak{L}_\xi^\infty} = \lim_{s\to\infty} \frac{\log_2 \mathfrak{S}_{\mathfrak{L}_\xi^\infty}(s)}{\log_2 s} = \lim_{s\to\infty} \frac{\log_2 \mathfrak{S}_\xi(s)}{\log_2 s} = \delta_\xi$, откуда из формул (4.3) и (4.5), [7], и из Следствия 2.3, [6], следуют равенства

$$\alpha_{\mathfrak{L}_\xi^\infty} = \alpha_{\mathfrak{S}_\xi} = \delta_{\mathfrak{S}_\xi} = \delta_{\mathfrak{L}_\xi^\infty} = \delta_\xi.$$

Для субмультипликативных и $\overset{m}{\sim}$эквивалентных функций $\mathfrak{S}_\xi$ и $\mathfrak{L}_\xi^\infty$, снова пользуясь Теоремой 5, [4], Леммой 1.10, [6] и Теоремой 3, получаем $s^{\delta_\xi} = s^{\alpha_{\mathfrak{L}_\xi^\infty}} \overset{m}{\sim} \mathfrak{L}^\infty_{\mathfrak{L}_\xi^\infty} \overset{m}{\sim} \mathfrak{L}^\infty_{\mathfrak{S}_\xi}(s)$, $s \in [1,\infty)$. Отсюда по Лемме 2.3, [5], $\mathfrak{S}_{\mathfrak{L}^\infty_{\mathfrak{L}_\xi^\infty}(s)} \overset{m}{\sim} \mathfrak{S}_{\mathfrak{L}^\infty_{\mathfrak{S}_\xi}(s)} \overset{m}{\sim} s^{\delta_\xi}$.

Таким образом в силу доказанной импликации 4)⇒1) Теоремы 5.9, [7], а также формул на стр. 79, [1], применённых к эквивогнутой функции $\mathfrak{L}^\infty_{\mathfrak{S}_\xi^\infty}(s)$, заключаем, что функция $(\mathfrak{L}^\infty_{\mathfrak{S}_\xi})^{\frac{1}{\delta_\xi}}(s) = \mathfrak{L}^\infty_{(\mathfrak{S}_\xi)^{\frac{1}{\delta_\xi}}}(s)$ является эквивогнутой и для субмультипликативной функции $G(s) := (\mathfrak{S}_\xi(s))^{\frac{1}{\delta_\xi}}$ выполняются соотношения

$$\mathfrak{L}_G^\infty(s) \overset{m}{\sim} \mathfrak{S}_G(s) \overset{m}{\sim} s,\ \ s \geq 1;\ \delta_G = 1. \tag{2}$$

Так как функция $(\mathfrak{S}_\xi)^{\frac{1}{\delta_\xi}}$ субмультипликативна, то по формулам (3.4), [7],

$$\mathfrak{S}_G(s) = \mathfrak{S}_{(\mathfrak{S}_\xi)^{\frac{1}{\delta_\xi}}}(s) \overset{m}{\sim} (\mathfrak{S}_{\mathfrak{S}_\xi}(s))^{\frac{1}{\delta_\xi}} \overset{m}{\sim} (\mathfrak{S}_\xi(s))^{\frac{1}{\delta_\xi}}.$$

.

Отсюда и из (2) $\mathfrak{S}_\xi(s) \overset{m}{\sim} (\mathfrak{S}_G(s))^{\delta_\xi} \overset{m}{\sim} s^{\delta_\xi}$, $\ s \geq 1$, что и доказывает выполнение импликации $4') \Rightarrow 2)$ для ξ.
□

Определение 2. Базу $b = (b_n)$ назовём *уплотняющейся*, если существует натуральное d, для которого при любых натуральных m, n найдётся число n', $n' = n'(m) > n$, такое что

$$\sum_{i=n+1}^{n+m} \chi_b \leq \sum_{i=n'+1}^{n'+m+d} \chi_b. \tag{5''}$$

Это понятие позволяет переформулировать условие $5')$ Теоремы 5 как

Теорему 6. Симметрическая функция ξ является псевдостепенной, тогда и только тогда, когда имеет уплотняющуюся базу b_ξ.

§2. Аналлагматические эквивогнутые функции. Односторонне суб- и супермультипликативные эквивогнутые функции

В [5] было рассмотрено отображение инверсии I_4 :

$$I_4\xi(t) := t \cdot \xi(\frac{1}{t}),\ 0 < t < \infty,$$

являющееся инволюцией как на множестве нормирующих, так и на множестве эквивогнутых функций.

Определение 3. Эквивогнутая функция ξ на $(0,\infty)$ называется *аналлагматической*, если она $\overset{m}{\sim}$инвариантна относителоно инверсии: $I_4\xi \overset{m}{\sim} \xi$.

Из этого определения и из формул (4.1), [7], вытекает

Лемма 7. Эквивогнутая функция ξ является аналлагматической, тогда и только тогда, когда $b_\xi^\infty \overset{a}{\sim} b_{\xi_*}^0$.

Из конструкции определения 4.2, [7], следуют те же выводы для аналлагматических функций, что и для симметрических:

1) Любая эквивогнутая функция ξ взимно однозначно определяется парой аналлагматических, левая и правая базы которых суть, соответственно, $(b_\xi^0, b_{\xi_*}^0)$ и $(b_\xi^\infty, b_{\xi_*}^\infty)$. Эти две аналлогматические функции мы назыаем *аналлагматическими скобками* ξ (по аналогии с симметрическими скобками ξ, [7]).

2)Аналогично симметрическим двойственные эквивогнутые функции могут быть аналлагматическими лишь одновременно.

Определение 4. Нормирующую функцию ξ на $[0,\infty)$ будем называть суб-(супер)мультипликативной *слева*, если найдётся константа $c > 0$, такая что для любых $s, t \in [0,1]$ справедливо

$$\xi(s \cdot t) \le c \cdot \xi(s) \cdot \xi(t), \text{соответственно, } \xi(s \cdot t) \ge c \cdot \xi(s) \cdot \xi(t).$$

Аналогично определяется суб-(супер)мультипликативная *справа* (т.е. для $s, t > 1$) эквивогнутая функция. Очевидно, что эквивогнутая функция субмультипликативна слева или справа, тогда и только тогда, когда двойственная к ней функция супермультипликативна там же.

Легко видеть, что оба вида односторонней суб- (супер)мультипликативности, - слева и справа, - эквивогнутой функции ξ равносильны *суб- (супер)аддитивности* её базы, соответственно, в нуле - b_ξ^0 и на бесконечности - b_ξ^∞, Лемма 3.5, [6]. Из предидущего очевидным образом вытекают

Лемма 8. Симметрическая функция ξ суб- (супер)мультипликативна слева (справа), тогда и только тогда, когда она супер-(суб)мультипликативна справа (соответственно, слева), что в свою очередь равносильно тому, что двойственная функция ξ_* супер-(суб)мультипликативна слева (соответственно, справа).

Лемма 9. Аналлагматическая функция ξ лишь одновременно, - слева и справа, - может быть суб- или супермультипликативна. В этом и только в этом случае двойственная к ней функция ξ_* является супер- или субмультипликативной также одновременно слева и справа.

Теорема 10. Заданная на полуоси псевдостепенная функция субмультипликативна слева.

Доказательство. Пусть для псевдостепенной функции φ функции φ^0 и φ^∞ суть её левая и правая симметрические скобки, и пусть для определённости $\max[\delta_\varphi^0, \delta_\varphi^\infty] = \delta_\varphi^0$. По теореме 5.7 это означает, что симметрическая функция φ^0 - псевдостепенная. В силу условия 4) Теоремы 5.9, [7], φ^0 есть функция регулярного изменения. Поэтому имеющая единичный верхний индекс эквивогнутая функция $\xi^0 := (\varphi^0)^{\frac{1}{\delta_\xi^0}}$, очевидно, также есть функция регулярного изменения. Из Теоремы 3.7.2), [6], теперь следует, что ξ^0 является субмультипликативной слева эквивогнутой функцией. Очевидно, что тогда такой же будет и $\varphi^0 = (\xi^0)^{\delta_\xi}$.
В этом рассуждении мы меняем ролями φ^0 и φ^∞, если $\max[\delta_\varphi^0, \delta_\varphi^\infty] = \delta_\varphi^\infty$. $\square$

Замечание 11. 1. Для пространств Марцинкевича на $[0,1]$ из доказанной теоремы следует, что их p-вогнутость, [7], влечёт субмультипликативность задающей эквивогнутой функции.
2. Всякая односторонне суб- или супермультипликативная эквивогнутая функция ξ на полуоси имеет регулярное изменение. Действительно, для субмультипликативной функции это следует из [6] и Теоремы 3. Отсюда же, а также из [5] и Замечания 4.2) этот вывод следует и для супер-мультипликативной эквивогнутой функции.
3. Покажем, что субмультипликативная и справа, и слева эквивогнутая функция не обязана быть двусторонне субмультипликативной. Возьмём любую субмультипликативную слева эквивогнутую функцию ξ (по предидущей теореме таковая найдётся), такую что $\delta_{b_\xi}^0 \neq \delta_{b_{\xi_*}}^0$ и построим эквивогнутую функцию φ по её базам $b_\varphi^0 := b_\xi^0$, $b_\varphi^\infty := b_{\xi_*}^0$, как это описано в [7]. Тогда по лемме 8 аналлагматическая функция φ является и слева, и справа субмультипликативной, но двусторонне субмульти-

пликативной быть не может. Действительно, по Теореме 3.7.1), [6], φ должна иметь регулярное изменение и в нуле, и на бесконечности, но показатели при этом оказываются различными, что противоречит Теореме 3.

Литература

1. **Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семёнов Е. М.** Интерполяция линейных операторов. М., Наука, 1978. - 400 с.

2. **Одинец В. П., Шлензак В. А.** Основы выпуклого анализа. /Авторизованный перевод с польск. В.П.Одинца при участии М.Я.Якубсона/ Под ред. В.Н.Исакова. - М.-Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований. - 520 с.

3. **Abakumov E. V., Mekler A. A.** Concave Regularly Varying Leader for Equiconcave Functions, J. Math. Anal. Appl., 187(1994)3, pp. 943-951.

4. **Меклер А. А.** О натуральных характеристиках регулярно меняющихся квазивогнутых модуляр // *Вестн. Сыктывкарск. ун–та. Сер. 1. Вып. 8. 2008. с. 27 - 38.*

5. **Меклер А. А.** Замечания о некоторых инвариантных свойствах пространств Марцинкевича и Орлича, I // *Вестн. Сыктывкарск. ун–та. Сер. 1. Вып. 14. 2011. с. 32-46.*

6. **Меклер А. А.** Замечания о некоторых инвариантных свойствах пространств Марцинкевича и Орлича, II // *Вестн. Сыктывкарск. ун–та. Сер. 1. Вып. 14. 2011. с. 47-61.*

7. **Меклер А. А.** О модулярах пространства Марцинкевича на $[0,1]$ и на $[0,\infty)$ // *Вестн. Сыктывкарск. ун–та. Сер. 1. Вып. 15. 2012. с. 95-112.*

Summary

Mekler A. A. On Marcinkiewicz modulars on $[0,1]$ and $[0,\infty) - II$

Some theorems on equi-concave, sub-multiplicative and pseudo-power modulars improve and add the corresponding results of the previous paper.

Keywords: equi-concave, sub-multiplicative and pseudo-power of Marcinkiewicz modulars.

MSC-1991: 46E30

Бременский Университет *Поступила 18.09.2012*